

Cvičení 7 – Hraniční podmínky a konstitutivní vztahy

Stejně jako potřebujeme charakterizovat vlastnosti materiálu prostřednictvím konstitutivních vztahů, musíme také zadat, jaké podmínky panují na povrchu tělesa. Tyto podmínky musí být konzistentní se zákony zachování, ale obecně nevyplývají z konstitutivních vztahů a liší se problém od problému. Hraniční podmínky musí být předepsány po celé hranici a musí být v souladu s matematickou teorií příslušných parciálních diferenciálních rovnic.

Hraniční podmínky musíme zadat i na rozhraních uvnitř tělesa, kde se skokem mění materiálové parametry, a veličiny, na které aplikujeme diferenciální operátory, jsou nespojité.

Intuitivní přístup (nemusí být vždy úspěšný)

U mechanické úlohy hraniční podmínka nahrazuje pohybovou rovnici. Na hranici tedy musíme předepsat tři skalární veličiny. Nabízí se tyto možnosti:

1. Předepíšeme rychlost (dynamická úloha) nebo posunutí (statická úloha). Napětí na povrchu se pak dopočte řešením problému.

$$\vec{v} = \vec{v}_{\text{edge}}, \quad \vec{u} = \vec{u}_{\text{edge}}$$

2. Předepíšeme sílu. Rychlost nebo posunutí na povrchu se dopočte řešením problému.

$$\vec{n} \cdot \vec{t} = \vec{t}$$

3. Na části povrchu předepíšeme rychlost nebo posunutí a na zbytku sílu.
4. Kombinovaná hraniční podmínka: Předepíšeme např. vertikální složku rychlosti a tečnou složku síly. Častá je zejména podmínka volného prokluzu (free slip):

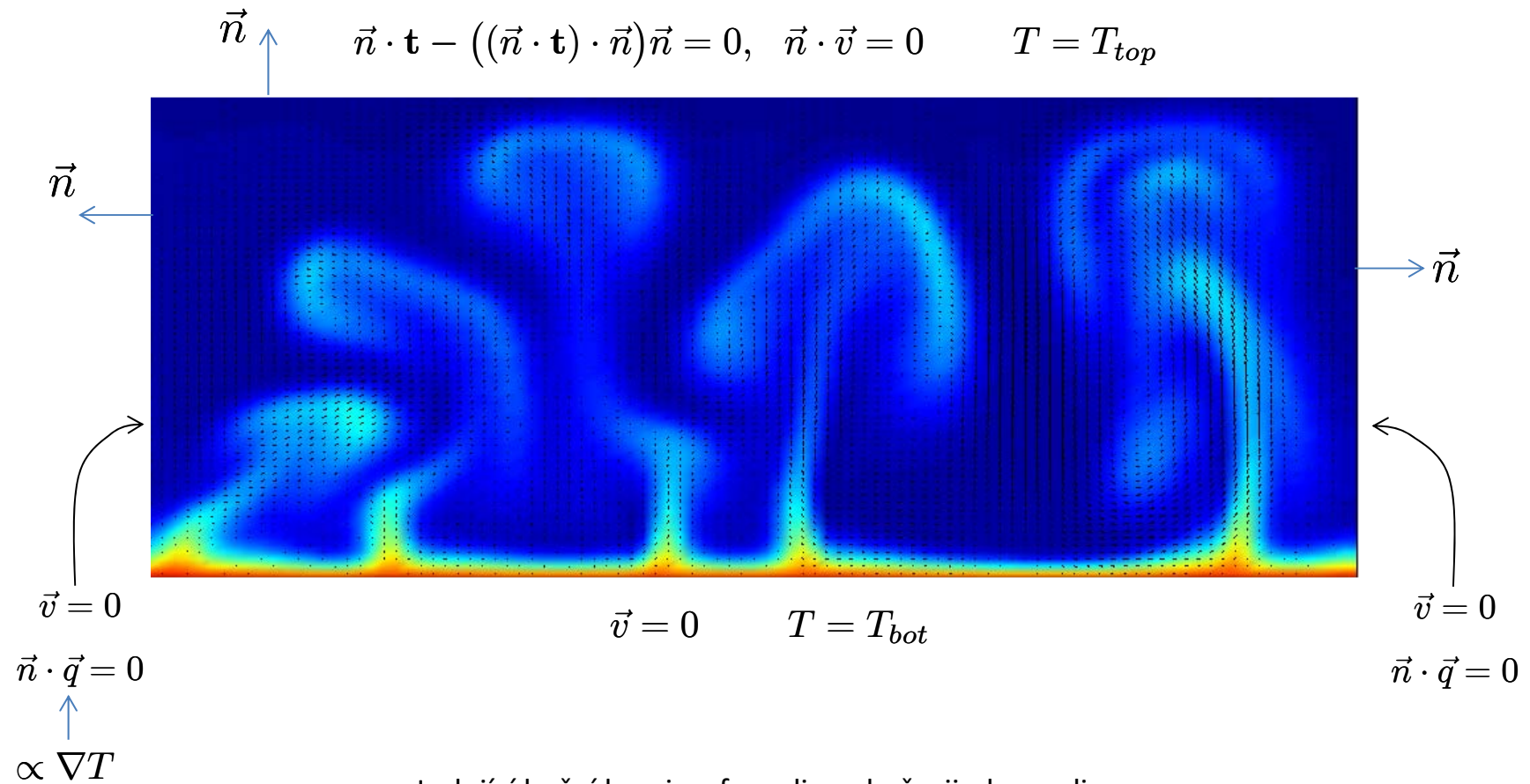
$$\vec{n} \cdot \vec{t} - [(\vec{n} \cdot \vec{t}) \cdot \vec{n}] \vec{n} = 0, \quad \vec{n} \cdot \vec{v} = 0$$

U termální úlohy nahrazuje hraniční podmínka rovnici přenosu tepla. Musíme předepsat jednu skalární veličinu. Může to být buď teplota nebo normálová složka tepelného toku.

$$T = T_{\text{surf}}, \quad \text{nebo} \quad \vec{n} \cdot \vec{q} = Q$$

Příklad: Termální konvekce

Kapalina má volný horní povrch, boční stěny a spodní deska jsou pevné.



Izolující boční hranice, free slip nahoře, jinde no slip.

Fázové rozhraní (intuitivní přístup)

Stefanova úloha

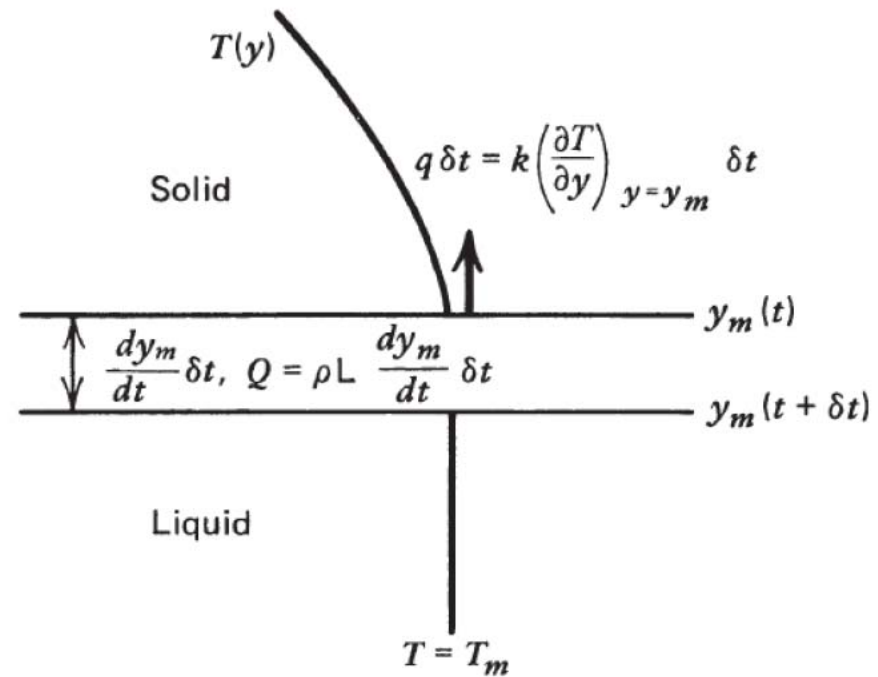


Figure 4.30 Latent heat released at the solidification boundary must be conducted upward through the solidified layer.

Uvažujme materiálový objem rozdělený *singulární plochou*. Tato plocha se pohybuje rychlostí $\vec{w}$ a nemusí jít nutně o materiálový povrch. Označme

$$v - \sigma := v^+ + v^-, \quad s - \sigma := s^+ + s^-$$

V případě *bez singulární plochy* má Gaussova věta pro tenzor tvar:

$$\int_v \operatorname{div} \mathbf{A} dv = \int_s \vec{n} \cdot \mathbf{A} da$$

Pokud singulární plochu zahrneme, je třeba Gaussovu větu změnit následovně:

$$\int_{v-\sigma} \operatorname{div} \mathbf{A} dv = \int_{s-\sigma} \vec{n} \cdot \mathbf{A} da - \int_{\sigma} \vec{n} \cdot [\mathbf{A}]_{-}^{+} da$$

kde $[\mathbf{A}]_{-}^{+} := \mathbf{A}^{+} - \mathbf{A}^{-}$.

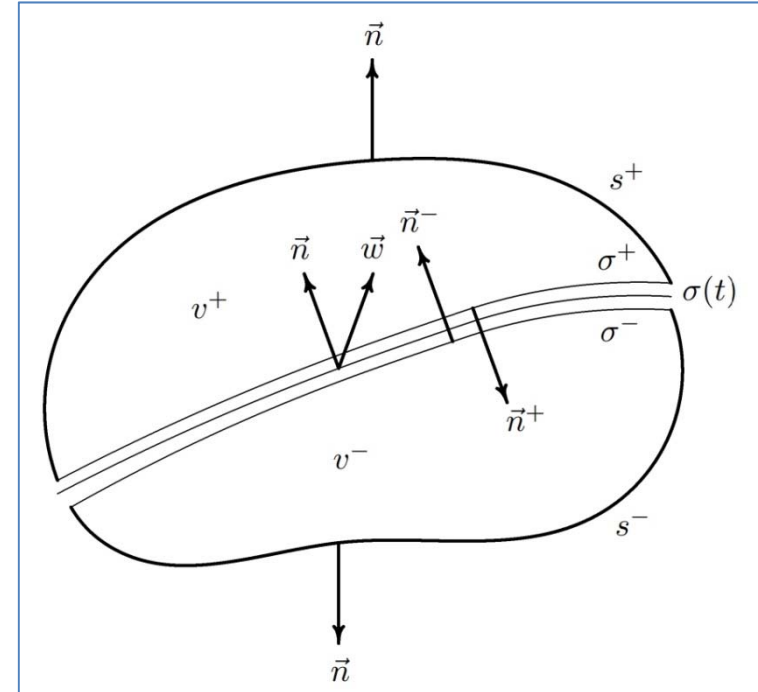
Reynoldsův transportní teorém odvozený v přednášce 3

$$\frac{D}{Dt} \int_v \phi dv = \int_v \left(\frac{D\phi}{Dt} + \phi \operatorname{div} \vec{v} \right) dv$$

platí pouze za předpokladu, že ϕ a $\vec{v}$ jsou diferencovatelné funkce. Pokud v tělese existuje singulární plocha, je třeba Reynoldsův teorém přepsat do tvaru

$$\frac{D}{Dt} \int_{v-\sigma} \phi dv = \int_{v-\sigma} \left(\frac{D\phi}{Dt} + \phi \operatorname{div} \vec{v} \right) dv + \int_{\sigma} \vec{n} \cdot [(\vec{v} - \vec{w})\phi]_{-}^{+} da$$

Odvození hraničních podmínek ze zákonů zachování



Napišme nyní s pomocí Reynoldsova teorému zákony zachování pro materiálový objem se singulární plochou.

Zákon zachování hmoty

Pokud se rychlost mění spojitě, tak můžeme psát:

$$\frac{D}{Dt} \int_v \rho dv = \int_v \left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} \right) dv = 0$$

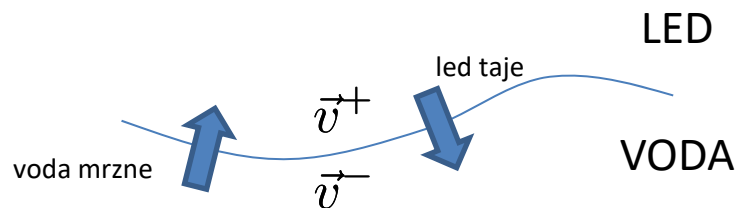
V případě, že objem obsahuje singulární plochu, kde se rychlost mění skokem, je třeba rovnici upravit následovně:

$$\frac{D}{Dt} \int_v \rho dv = \int_{v-\sigma} \left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} \right) dv + \int_{\sigma} \vec{n} \cdot [(\vec{v} - \vec{w})\rho]_{-}^{+} da$$

Tento vztah musí platit pro libovolnou část objemu $v - \sigma$ a libovolnou část plochy σ . Platí tedy, že

$$\underbrace{\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0}_{\text{rovnice kontinuity}} \quad \text{v objemu } v - \sigma \quad \text{a} \quad \underbrace{\vec{n} \cdot [(\vec{v} - \vec{w})\rho]_{-}^{+} = 0}_{\text{podmínka na hranici}} \quad \text{na ploše } \sigma$$

Příklad – fázové rozhraní:



$$\vec{n} \cdot [(\vec{v} - \vec{w})\rho]_{-}^{+} = 0$$

$$\vec{n} \cdot [(\vec{v}^{+} - \vec{w})\rho_{\text{led}} - (\vec{v}^{-} - \vec{w})\rho_{\text{voda}}] = 0$$

V soustavě spojené s hranicí ($\vec{w} = 0$):

$$\vec{n} \cdot \vec{v}^{+} \rho_{\text{led}} = \vec{n} \cdot \vec{v}^{-} \rho_{\text{voda}}$$

Zákon zachování hybnosti

$$\frac{D}{Dt} \int_v \rho \vec{v} dv - \int_s \vec{t}_{(\vec{n})} da - \int_v \rho \vec{f} dv = 0$$

Aplikace modifikovaného Reynoldsova transportního teorému na veličinu : $\phi = \rho \vec{v}$

$$\int_{v-\sigma} \left[\frac{D(\rho \vec{v})}{Dt} + \rho \vec{v} \operatorname{div} \vec{v} \right] dv + \int_{\sigma} \vec{n} \cdot [\rho(\vec{v} - \vec{w}) \otimes \vec{v}]_{-}^{+} da - \int_s \vec{t}_{(\vec{n})} da - \int_v \rho \vec{f} dv = 0$$

Aplikace modifikované Gaussovy věty na vnější trakci:

$$\int_{v-\sigma} \left[\frac{D(\rho \vec{v})}{Dt} + \rho \vec{v} \operatorname{div} \vec{v} - \operatorname{div} \mathbf{t} - \rho \vec{f} \right] dv + \int_{\sigma} \vec{n} \cdot [\rho(\vec{v} - \vec{w}) \otimes \vec{v} - \mathbf{t}]_{-}^{+} da = 0$$

Po aplikaci rovnici kontinuity, díky které se zbavíme druhého členu v objemovém integrálu,

$$\vec{v} \frac{D\rho}{Dt} = -\rho \vec{v} \operatorname{div} \vec{v},$$

dostáváme pohybovou rovnici a podmínku, která musí být splněna všude na ploše nespojitosti:

$$\int_{v-\sigma} \left(\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} - \operatorname{div} \mathbf{t} - \rho \vec{f} \right) dv + \int_{\sigma} \vec{n} \cdot [\rho(\vec{v} - \vec{w}) \otimes \vec{v} - \mathbf{t}]_{-}^{+} da = 0$$

Tj. hraniční podmínka má tvar $\vec{n} \cdot [\rho(\vec{v} - \vec{w}) \otimes \vec{v} - \mathbf{t}]_{-}^{+} = 0$.

V případě materiálového povrchu pak dostaneme $\vec{n} \cdot [\mathbf{t}]_{-}^{+} = 0$.

Zákon zachování hybnosti

Prove directly that $\mathbf{s}(\mathbf{n}, \mathbf{x}) = -\mathbf{s}(-\mathbf{n}, \mathbf{x})$ by applying $(2)_1$ to the part $\mathcal{P}$ that occupies the region $\mathcal{R}_\delta$ at time t . Here $\mathcal{R}_\delta$ is the rectangular region which is centered at $\mathbf{x}$, which has dimensions $\delta \times \delta \times \delta^2$, and which has $\mathbf{n}$ normal to the $\delta \times \delta$ faces (Fig. 8).

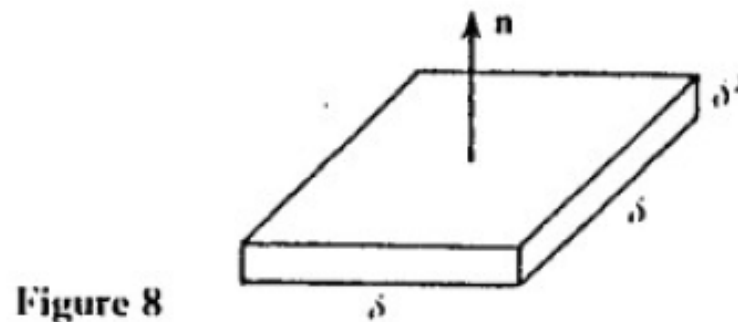


Figure 8

$$\begin{aligned} \int_{\partial \mathcal{P}_t} \mathbf{s}(\mathbf{n}) dA + \int_{\mathcal{P}_t} \mathbf{b} dV &= \int_{\mathcal{P}_t} \dot{\mathbf{v}} \rho dV, \\ \int_{\partial \mathcal{P}_t} \mathbf{r} \times \mathbf{s}(\mathbf{n}) dA + \int_{\mathcal{P}_t} \mathbf{r} \times \mathbf{b} dV &= \int_{\mathcal{P}_t} \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{v}} \rho dV. \end{aligned} \tag{2}$$

Zákon zachování energie (odvození je analogické jako v případě zákona zachování hybnosti)

$$\vec{n} \cdot \left[\rho(\vec{v} - \vec{w}) \left(\epsilon + \frac{1}{2} \vec{v} \cdot \vec{v} \right) - \mathbf{t} \cdot \vec{v} + \vec{q} \right]_{-}^{+} = 0$$

Na materiálovém povrchu pak dostaneme $\vec{n} \cdot [\vec{q}]_{-}^{+} = 0$.

Na fázovém rozhraní:

$$\vec{n} \cdot \left[\rho(\vec{v} - \vec{w}) \left(\epsilon + \frac{1}{2} \vec{v} \cdot \vec{v} \right) - \mathbf{t} \cdot \vec{v} + \vec{q} \right]_{-}^{+} \approx \vec{n} \cdot [\rho(\vec{v} - \vec{w}) (\epsilon + p/\rho) + \vec{q}]_{-}^{+}$$

Měrné teplo je definováno následovně: $L = -[\epsilon + p/\rho]_{-}^{+}$

Odtud:

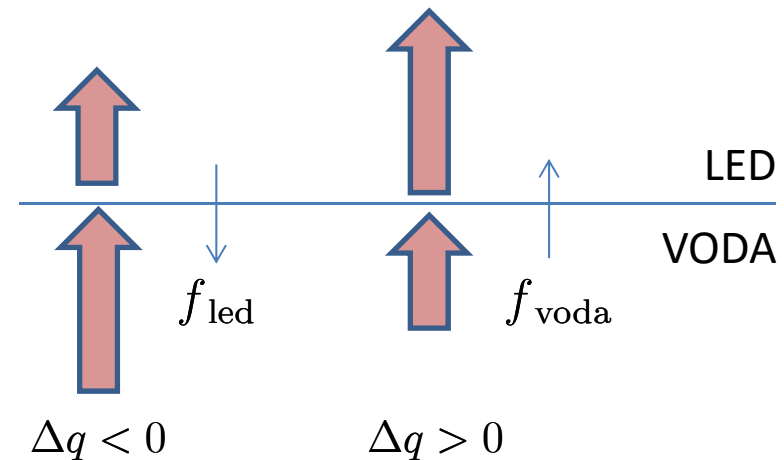
$$-\rho^{+} L \vec{n} \cdot (\vec{v}^{+} - \vec{w}) + \vec{n} \cdot [\vec{q}]_{-}^{+} = 0$$

Systém voda – led:

$$\underbrace{\vec{n} \cdot (\vec{q}_{\text{led}} - \vec{q}_{\text{voda}})}_{\Delta q} = \rho_{\text{led}} L \underbrace{\vec{n} \cdot (\vec{v}_{\text{led}} - \vec{w})}_{f_{\text{led}}}$$

$$\rho_{\text{led}} f_{\text{led}} = \rho_{\text{voda}} f_{\text{voda}}$$

$$\vec{n} \cdot [(\vec{v} - \vec{w})\rho]_{-}^{+} = 0$$



Fázové rozhraní (intuitivní přístup)

Obrázek napravo je schema klasické úlohy: Stefanova problému

Myšlenka řešení je ta, že veškerý tepelný tok jde do latentního tepla, tj.

$$-q = \rho_{\text{led}} L w$$

kde $\vec{w}$ je (vertikální) rychlost fázového rozhraní, neboli rychlost tloušťnutí ledu

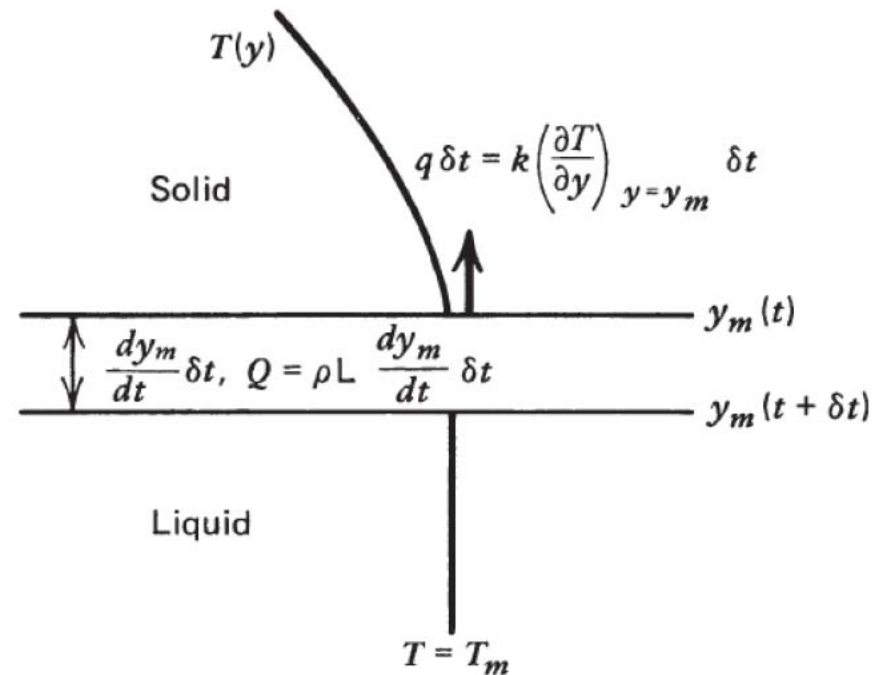


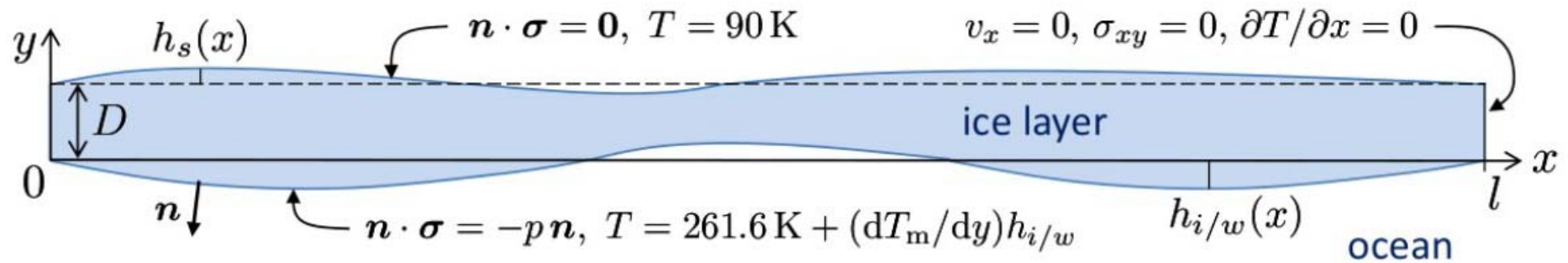
Figure 4.30 Latent heat released at the solidification boundary must be conducted upward through the solidified layer.

Intuitivní zobecnění pro případ, že led teče, tj. fázové rozhraní je částečně unášeno ledem, a zároveň i voda teče, tj. její teplotní profil není konstantní, tj. tepelný tok v ní není u hranice nulový:

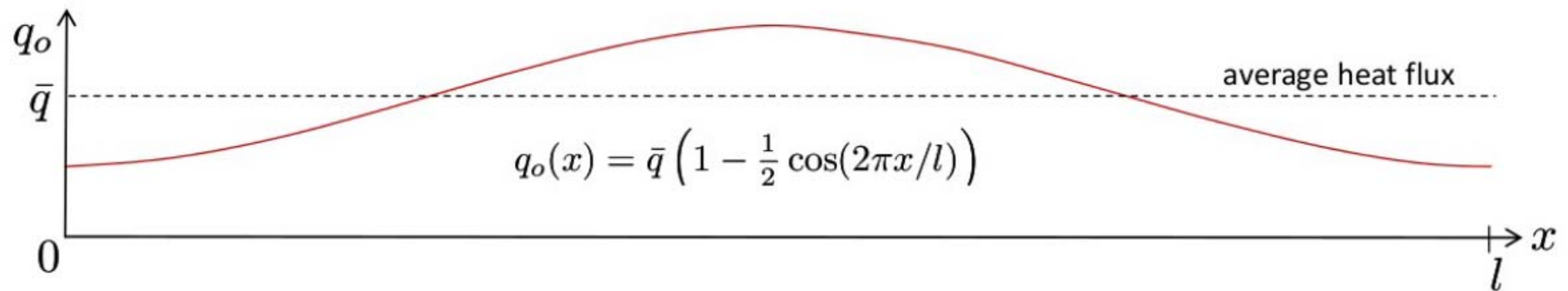
$$q \rightarrow \vec{n} \cdot [\vec{q}]_{-}^{+} = \vec{n} \cdot (\vec{q}_{\text{led}} - \vec{q}_{\text{voda}}), \quad w \rightarrow \vec{n} \cdot (\vec{w} - \vec{v}_{\text{led}})$$

celkově tedy: $\vec{n} \cdot (\vec{q}_{\text{led}} - \vec{q}_{\text{voda}}) = \rho_{\text{led}} L \vec{n} \cdot (\vec{v}_{\text{led}} - \vec{w})$

a) Boundary conditions



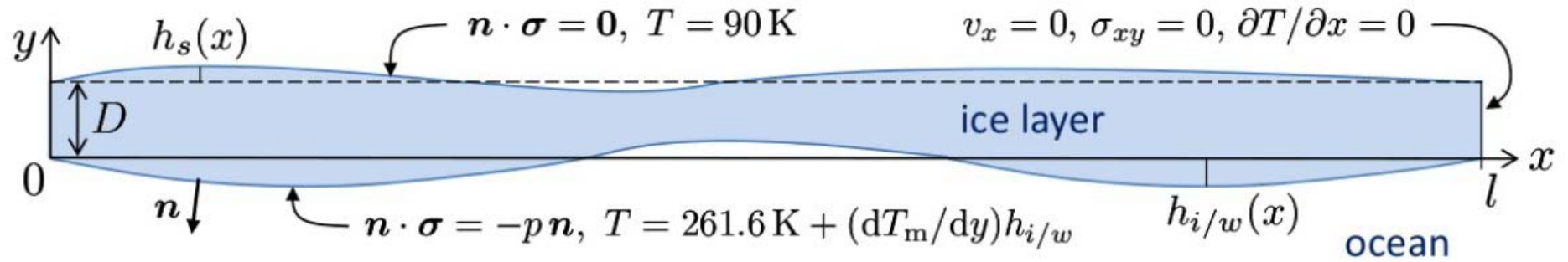
b) Heat flux from the ocean



$$T = 90 \text{ K}, \quad \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \quad \text{for } y = D + h_s(x, t),$$

$$T = 261.6 \text{ K} + \frac{dT_m}{dy} h_{i/w}, \quad \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} = -\mathbf{n} g (D \rho_i - h_{i/w} \rho_w) \quad \text{for } y = h_{i/w}(x, t)$$

a) Boundary conditions



$$\frac{\partial h_{i/w}}{\partial t} = v_y + u_y - \frac{\partial h_{i/w}}{\partial x} (v_x + u_x),$$

$$\mathbf{u} = (u_x, u_y) = \frac{\mathbf{n} \cdot (\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_w)}{L \rho_i} \mathbf{n}.$$

$$T = 90 \text{ K}, \quad \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \quad \text{for } y = D + h_s(x, t),$$

$$T = 261.6 \text{ K} + \frac{dT_m}{dy} h_{i/w}, \quad \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} = -\mathbf{n} g (D \rho_i - h_{i/w} \rho_w) \quad \text{for } y = h_{i/w}(x, t)$$