

b) Systém je zahříván a ochlazován zvenčí. Parametry nezávisí na teplotě.

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0$$

$$\operatorname{div} \mathbf{t} + \rho \vec{f} = \rho_0 \frac{D\vec{v}}{Dt}$$

$$\mathbf{t} = -p\mathbf{I} + \eta \left[\operatorname{grad} \vec{v} + (\operatorname{grad} \vec{v})^T \right]$$

$$\rho_0 C_p \frac{\partial T}{\partial t} = -\rho_0 C_p \vec{v} \cdot \operatorname{grad} T + k \operatorname{div} \operatorname{grad} T$$

$$\rho = \rho_0 [1 - \alpha(T - T_0)]$$

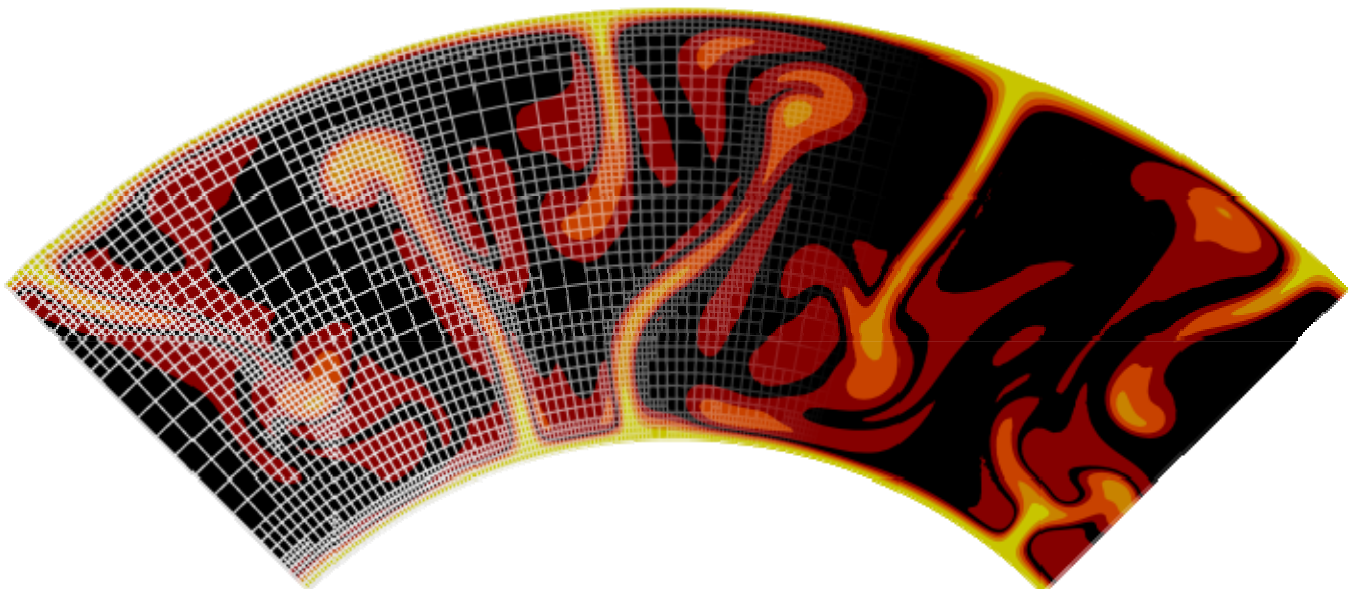
$$\rho \frac{D\epsilon}{Dt} = \mathbf{t} : \mathbf{d} - \operatorname{div} \vec{q} + \rho h$$



Rovnice termální konvekce v Boussinesgově aproximaci.

Znamé materiálové parametry: $\rho_0, \eta, C_p, k, \alpha$

Počet neznámých ($\mathbf{t}, \vec{v}, p, \rho, T$) = 12 = počet rovnic



Referenční konfigurace

$$\text{Div } \mathbf{t}_0 + \rho_0 \vec{f}_0 = 0 \quad (9.1)$$

$$-\text{Grad } p_0 + \text{Div } \mathbf{t}_0^D + \rho_0 \vec{f}_0 = 0 \quad (9.3)$$

$$[\vec{N} \cdot \mathbf{t}_0]_{-}^{+} = 0 \quad (9.5)$$

Lagrangeovský a eulerovský přírůstek

$$\vec{x} = \vec{X} + \vec{U}(\vec{X}, t) \quad (9.10)$$

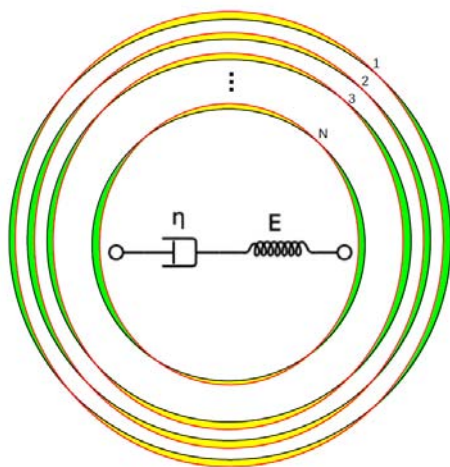
$$q^E(\vec{x}, t) := q(\vec{x}, t) - q_0(\vec{x}) \quad (9.11a)$$

$$q^L(\vec{X}, t) := Q(\vec{X}, t) - q_0(\vec{X}) \quad (9.11b)$$

$$q^L = q^E + \vec{U} \cdot \text{Grad } q_0(\vec{X}) \quad (9.13!)$$

$$q^L(\vec{X}) \approx q^L(\vec{x}), \quad q^E(\vec{x}) \approx q^E(\vec{X}), \quad \vec{U}(\vec{X}) \approx \vec{U}(\vec{x})$$

$\text{Grad} \approx \text{grad}$, $\text{Div} \approx \text{div}$ pro malé veličiny



	$\delta\rho = [\rho_0]_i$
	$\delta\rho = -[\rho_0]_i$
	$\delta\rho = 0$
	deformed body
	reference sphere

Rovnice kontinuity v přírůstkovém tvaru

$$\rho^E = -\text{Div} [\rho_0(\vec{X})\vec{U}] \quad (9.17)$$

$$\rho^L = -\rho_0(\vec{X})\text{Div} \vec{U} \quad (9.18)$$

$$\rho^L = \rho^E + \vec{U} \cdot \text{Grad} \rho_0(\vec{X}) \quad (9.19)$$

Přírůstek napětí

$$\mathbf{T}^{(1)}(\vec{X}, t) = \mathbf{t}_0(\vec{X}) + \mathbf{T}^{(1),L} \quad (9.20)$$

$$\mathbf{t}^L := \mathbf{t}(\vec{X}, t) - \mathbf{t}_0(\vec{X}) \quad (9.24)$$

$$\mathbf{t}^E := \mathbf{t}(\vec{x}, t) - \mathbf{t}_0(\vec{x}) \quad (9.27)$$

$$\mathbf{t}^L = \mathbf{T}^{(1),L} - (\text{tr} \mathbf{H})\mathbf{t}_0(\vec{X}) + \mathbf{H}^T \cdot \mathbf{t}_0(\vec{X}) \quad (9.25)$$

$$\mathbf{t}^L = \mathbf{t}^E + \vec{U} \cdot \text{Grad} \mathbf{t}_0(\vec{X}) \quad (9.28)$$

$$\mathbf{t}^L = \mathbf{t}^E - \rho_0(\vec{X})[\vec{U} \cdot \vec{f}_0(\vec{X})]\mathbf{I} \quad \text{pro hydrostatického předpětí}$$

Přírůstek gravitačního zrychlení

$$\vec{f}^E = \vec{f}(\vec{x}, t) - \vec{f}_0(\vec{x}) \quad (9.30a)$$

$$\vec{f}^L = \vec{f}(\vec{X}, t) - \vec{f}_0(\vec{X}) \quad (9.30b)$$

$$\vec{f}^L = \vec{f}^E + \vec{U} \cdot \text{Grad} \vec{f}_0(\vec{X}) \quad (9.31)$$

Linearizovaná pohybová rovnice

1) $\mathbf{T}^{(1),L}, \vec{f}^L$:

$$\text{Div } \mathbf{T}^{(1),L} + \rho_0 \vec{f}^L = \rho_0 \frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial t^2} \quad (9.32)$$

2) $\mathbf{t}^L, \rho^L, \vec{f}^L$:

$$\text{a) } \text{Div } \mathbf{t}^L + \rho_0 \vec{f}^L + \rho^L \vec{f}_0 - \text{Grad } \vec{U} : \text{Grad } \mathbf{t}_0 = \rho_0 \frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial t^2}$$

$$\text{b) } \text{Div } \mathbf{t}^L + \rho_0 \vec{f}^L + \rho^L \vec{f}_0 + \rho_0 (\text{Grad } \vec{U}) \cdot \vec{f}_0 -$$

$$-\text{Grad } \vec{U} : \text{Grad } \mathbf{t}_0^D + \text{Grad } \vec{U} \cdot \text{Div } \mathbf{t}_0^D = \rho_0 \frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial t^2} \quad (9.35)$$

3) $\mathbf{t}^L, \rho^E, \vec{f}^E$:

$$\text{Div } \mathbf{t}^L + \rho_0 \vec{f}^E + \rho^E \vec{f}_0 + \text{Grad } (\rho_0 \vec{U} \cdot \vec{f}_0) +$$

$$+\text{Grad } (\vec{U} \cdot \text{Div } \mathbf{t}_0^D) - \text{Div } (\vec{U} \cdot \text{Grad } \mathbf{t}_0^D) = \rho_0 \frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial t^2}$$

4) $\mathbf{t}^E, \rho^E, \vec{f}^E$:

$$\text{Div } \mathbf{t}^E + \rho_0 \vec{f}^E + \rho^E \vec{f}_0 = \rho_0 \frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial t^2} \quad (9.38)$$

Pohybová rovnice pro hydrostatické předpětí

1) $\mathbf{T}^{(1),L}, \vec{f}^L$:

$$\text{Div } \mathbf{T}^{(1),L} + \rho_0 \vec{f}^L = \rho_0 \frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial t^2}$$

2) $\mathbf{t}^L, \rho^L, \vec{f}^L$:

$$\text{Div } \mathbf{t}^L + \rho_0 \vec{f}^L + \rho^L \vec{f}_0 + \rho_0 (\text{Grad } \vec{U}) \cdot \vec{f}_0 = \rho_0 \frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial t^2}$$

3) $\mathbf{t}^L, \rho^E, \vec{f}^E$:

$$\text{Div } \mathbf{t}^L + \rho_0 \vec{f}^E + \rho^E \vec{f}_0 + \text{Grad } (\rho_0 \vec{U} \cdot \vec{f}_0) = \rho_0 \frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial t^2}$$

4) $\mathbf{t}^E, \rho^E, \vec{f}^E$:

$$\text{Div } \mathbf{t}^E + \rho_0 \vec{f}^E + \rho^E \vec{f}_0 = \rho_0 \frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial t^2}$$

V našem případě je $\vec{f}_0 = -g_0 \vec{e}_r$. Do rovnic je dále třeba vyjádřit přírůstky ρ_L a ρ_E z rovnice kontinuity a spočítat variace gravitačního zrychlení v důsledku selfgravitace. To zpravidla děláme integrací, kdy počítáme $\vec{f}^E$. Pokud budeme používat $\vec{f}^L$, musíme ho spočítat z „posuvného pravidla“ (rovnice 9.28) nebo řešit Laplace-Poissonovu rovnici v lagrangeovském tvaru.

Kulové referenční těleso, formulace v $\mathbf{t}^L, \rho^E, \vec{f}^E$

$$\text{Div } \mathbf{t}^L + \rho_0 \vec{g}^E + (\text{Div } \rho_0 \vec{U}) g_0 \vec{e}_r - \text{Grad}(\rho_0 U_r g_0) = \rho_0 \frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial t^2}$$

Vztah lze dále upravit rozderivováním $\text{Grad}(\rho_0 u_r g_0)$.

Kulové referenční těleso, formulace v $\mathbf{t}^E, \rho^E, \vec{f}^E$

$$\text{Div } \mathbf{t}^E + \rho_0 \vec{g}^E + \text{Div}(\rho_0 \vec{u}) g_0 \vec{e}_r = \rho_0 \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}$$

neboli

$$\text{Div } \mathbf{t}^E + \rho_0 \vec{g}^E + \rho_0 g_0 \vec{e}_r \text{Div } \vec{u} + \frac{\partial \rho_0}{\partial r} u_r g_0 \vec{e}_r = \rho_0 \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}$$

Všimněte si, že rovnice formulujeme ve „velkých“ souřadnicích, tj. na kulovém tělese.

Hraniční podmínky

Odvození:

Na horním povrchu tělesa v referenční konfiguraci platí

$$\vec{N}_0(\vec{X}) \cdot \mathbf{t}_0(\vec{X}) = 0 \quad (*)$$

Ve stejném materiálovém bodě po deformaci platí analogicky

$$\vec{N}(\vec{X}, t) \cdot \mathbf{t}(\vec{X}, t) = 0$$

Použijeme vztah mezi $\vec{N}_0$ a $\vec{N}$ a za $\mathbf{t}(\vec{X}, t)$ dosadíme $\mathbf{t}_0(\vec{X}) + \mathbf{t}^L$. Hraniční podmínku na deformovaném povrchu pak můžeme přepsat do tvaru

$$\frac{\vec{N}_0 \cdot \mathbf{F}^{-1}}{\sqrt{\vec{N}_0 \cdot \mathbf{B} \cdot \vec{N}_0}} \cdot (\mathbf{t}_0(\vec{X}) + \mathbf{t}^L) = 0$$

Což lze s použitím linearizovaného vztahu pro normálu přepsat do tvaru

$$\left((1 + \vec{N}_0 \cdot \mathbf{H} \cdot \vec{N}_0) \vec{N}_0 - \mathbf{H} \cdot \vec{N}_0 \right) \cdot (\mathbf{t}_0(\vec{X}) + \mathbf{t}^L) = 0$$

Po roznásobení, zanedbání členů vyššího řádu a použití podmínky (*) z předchozí strany dostaneme

$$-(\mathbf{H} \cdot \vec{N}_0) \cdot \mathbf{t}_0(\vec{X}) + \vec{N}_0 \cdot \mathbf{t}^L = 0$$

V případě hydrostatického předpětí je na horním povrchu $\mathbf{t}_0(\vec{X}) = -p_0(\vec{X})\mathbf{I} = 0$ a hraniční podmínka přejde do tvaru

$$\vec{N}_0 \cdot \mathbf{t}^L = 0$$

Eulerovskou hraniční podmínku dostaneme dosazením „posuvného pravidla“ přepsaného pro případ hydrostatického předpětí:

$$\vec{N}_0 \cdot \mathbf{t}^L = \vec{N}_0 \cdot (\mathbf{t}^E - (\vec{u} \cdot \text{Grad } p_0)\mathbf{I}) = 0$$

Použijeme kulového tělesa dále použijeme vztahy $\vec{N}_0 = \vec{e}_r$, $\vec{f}_0 = \vec{g}_0$ a $\text{Grad } p_0 = \rho_0 \vec{g}_0 = -\rho_0 g_0 \vec{e}_r$, což nám dá

$$\vec{e}_r \cdot \mathbf{t}^E = -u_r g_0 \rho_0 \vec{e}_r$$

Na rozhraní pevná látka – kapalina pak analogickým způsobem dostaneme

$$\vec{N}_0(\vec{X}) \cdot \mathbf{t}_0(\vec{X}) = -p_0 \vec{N}_0$$

$$\vec{N}(\vec{X}, t) \cdot \mathbf{t}(\vec{X}, t) = -p_0(\vec{X}, t) \vec{N}(\vec{X}, t)$$

což stejně jako výše upravíme do tvaru

$$\vec{N}_0 \cdot \mathbf{t}^L = -\vec{N}_0 p^L$$

Podmínku pro Eulerovský přírůstek pak dostaneme dosazení posuvného pravidla

$$\vec{N}_0 \cdot \mathbf{t}^L = \vec{N}_0 \cdot (\mathbf{t}^E - (\vec{u} \cdot \text{Grad } p_0) \mathbf{I})_{\text{solid}} = -\vec{N}_0 p^L = -\vec{N}_0 (p^E + \vec{u} \cdot \text{Grad } p_0)_{\text{liquid}}$$

což lze přepsat do tvaru

$$\vec{N}_0 \cdot \mathbf{t}^E = -\vec{N}_0 p^E - \vec{N}_0 (\vec{u} \cdot \vec{f}_0) (\rho_{0,\text{liquid}} - \rho_{0,\text{solid}})$$

Pro kulové těleso pak dostaneme

$$-\vec{e}_r \cdot \mathbf{t}^E = \vec{e}_r p^E - \vec{e}_r u_r g_0 (\rho_{0,\text{liquid}} - \rho_{0,\text{solid}})$$

Mechanické hraniční podmínky – shrnutí

Horní (volný) povrch

$$\vec{N}_0 \cdot \mathbf{t}^L = 0$$

$$\vec{N}_0 \cdot \mathbf{t}^E = \vec{N}_0 (\rho_0 \vec{u} \cdot \vec{f}_0)$$

Rozhraní pevná látka – kapalina

$$\vec{N}_0 \cdot \mathbf{t}^L = -\vec{N}_0 p^L$$

$$\vec{N}_0 \cdot \mathbf{t}^E = -\vec{N}_0 p^E - \vec{N}_0 (\vec{u} \cdot \vec{f}_0) (\rho_{0,\text{liquid}} - \rho_{0,\text{solid}})$$

Pro kulové těleso - horní povrch

$$\vec{e}_r \cdot \mathbf{t}^L = 0$$

$$\vec{e}_r \cdot \mathbf{t}^E = -\vec{e}_r (u_r \rho_o g_0)$$

Rozhraní pevná látka – kapalina

$$\vec{e}_r \cdot \mathbf{t}^L = -\vec{e}_r p^L$$

$$\vec{e}_r \cdot \mathbf{t}^E = -\vec{e}_r p^E + \vec{e}_r u_r g_0 (\rho_{0,\text{liquid}} - \rho_{0,\text{solid}})$$

Konstitutivní vztah pro elastický materiál

Elastický materiál lze popsat vztahem

$$\mathbf{T}^{(2)}(\vec{X}, t) = \tilde{\mathbf{T}}^{(2)}(\mathbf{C}(\vec{X}, t))$$

V izotropním případě lze vztah přepsat pomocí reprezentačního teorému pro tenzorovou funkci:

$$\mathbf{T}^{(2)} = a_0 \mathbf{I} + a_1 \mathbf{C} + a_2 \mathbf{C}^2,$$

kde koeficienty a_0 , a_1 , a_2 jsou funkce invariantů tenzoru $\mathbf{C}$.
V lineárním případě

$$\mathbf{T}^{(2)} = c_0 \mathbf{I} + c_1 (\text{tr } \mathbf{E}) \mathbf{I} + c_2 \mathbf{E} = \mathbf{t}_0(\vec{X}) + c_1 (\text{tr } \mathbf{E}) \mathbf{I} + c_2 \mathbf{E}$$

kde c_0 , c_1 , c_2 jsou materiálové konstanty a c_0 lze interpretovat jako předpětí. Poslední vztah nyní vyjádříme pomocí lagrangeovského a eulerovského přírůstku Cauchyho tenzoru napětí. Použijeme následující vztahy

$$\mathbf{t}^L = \mathbf{t}(\vec{X}, t) - \mathbf{t}_0(\vec{X})$$

$$\mathbf{t}^L = \mathbf{t}^E + \vec{u} \cdot \text{Grad } \mathbf{t}_0(\vec{X})$$

$$\mathbf{T}^{(2)}(\vec{X}, t) \approx (1 + \text{tr } \mathbf{H})\mathbf{t}(\vec{X}, t) - \mathbf{H}^T \cdot \mathbf{t}(\vec{X}, t) - \mathbf{t}(\vec{X}, t) \cdot \mathbf{H}$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{H} + \mathbf{H}^T).$$

Nejprve do třetího vztahu na této straně dosadíme

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}_0 + \mathbf{t}^L :$$

$$\mathbf{T}^{(2)}(\vec{X}, t) = \mathbf{t}_0(\vec{X}) + (\text{tr } \mathbf{H})\mathbf{t}_0(\vec{X}) - \mathbf{H}^T \cdot \mathbf{t}_0(\vec{X}) - \mathbf{t}_0(\vec{X}) \cdot \mathbf{H} + \mathbf{t}^L =$$

$$= \mathbf{t}_0(\vec{X}) + c_1(\text{tr } \mathbf{E})\mathbf{I} + c_2\mathbf{E} =$$

$$= \mathbf{t}_0(\vec{X}) + c_1(\text{tr } \mathbf{H})\mathbf{I} + \frac{1}{2}c_2(\mathbf{H} + \mathbf{H}^T).$$

Odtud

$$\mathbf{t}^L = c_1(\text{tr } \mathbf{H})\mathbf{I} + \frac{1}{2}c_2(\mathbf{H} + \mathbf{H}^T) - (\text{tr } \mathbf{H})\mathbf{t}_0(\vec{X}) + \mathbf{H}^T \cdot \mathbf{t}_0(\vec{X}) + \mathbf{t}_0(\vec{X}) \cdot \mathbf{H}$$

V případě hydrostatického předpětí pak dostaneme

$$\mathbf{t}^L = c_1(\text{tr } \mathbf{H})\mathbf{I} + \frac{1}{2}c_2(\mathbf{H} + \mathbf{H}^T) + (\text{tr } \mathbf{H})p_0(\vec{X}) - \mathbf{H}^T p_0(\vec{X}) - p_0(\vec{X}) \cdot \mathbf{H} =$$

$$= (c_1 + p_0)(\text{tr } \mathbf{H})\mathbf{I} + \frac{1}{2}(c_2 - p_0)(\mathbf{H} + \mathbf{H}^T) =$$

$$= \lambda(\text{div } \vec{u})\mathbf{I} + \frac{1}{2}\mu(\text{grad } \vec{u} + (\text{grad } \vec{u})^T).$$

Vztah pro eulerovský přírůstek odvodíme pomocí vztahu

$$\mathbf{t}^L = \mathbf{t}^E + \vec{u} \cdot \text{Grad } \mathbf{t}_0(\vec{X}),$$

který v případě hydrostatického předpětí přejde do tvaru

$$\mathbf{t}^L = \mathbf{t}^E - u_r g_0(\vec{X}) \rho_0(\vec{X}) \mathbf{I}.$$

Dostaneme pak

$$\mathbf{t}^E = \left(\lambda \operatorname{div} \vec{u} + u_r g_0(\vec{X}) \rho_0(\vec{X}) \right) \mathbf{I} + \frac{1}{2} \mu (\operatorname{grad} \vec{u} + (\operatorname{grad} \vec{u})^T)$$