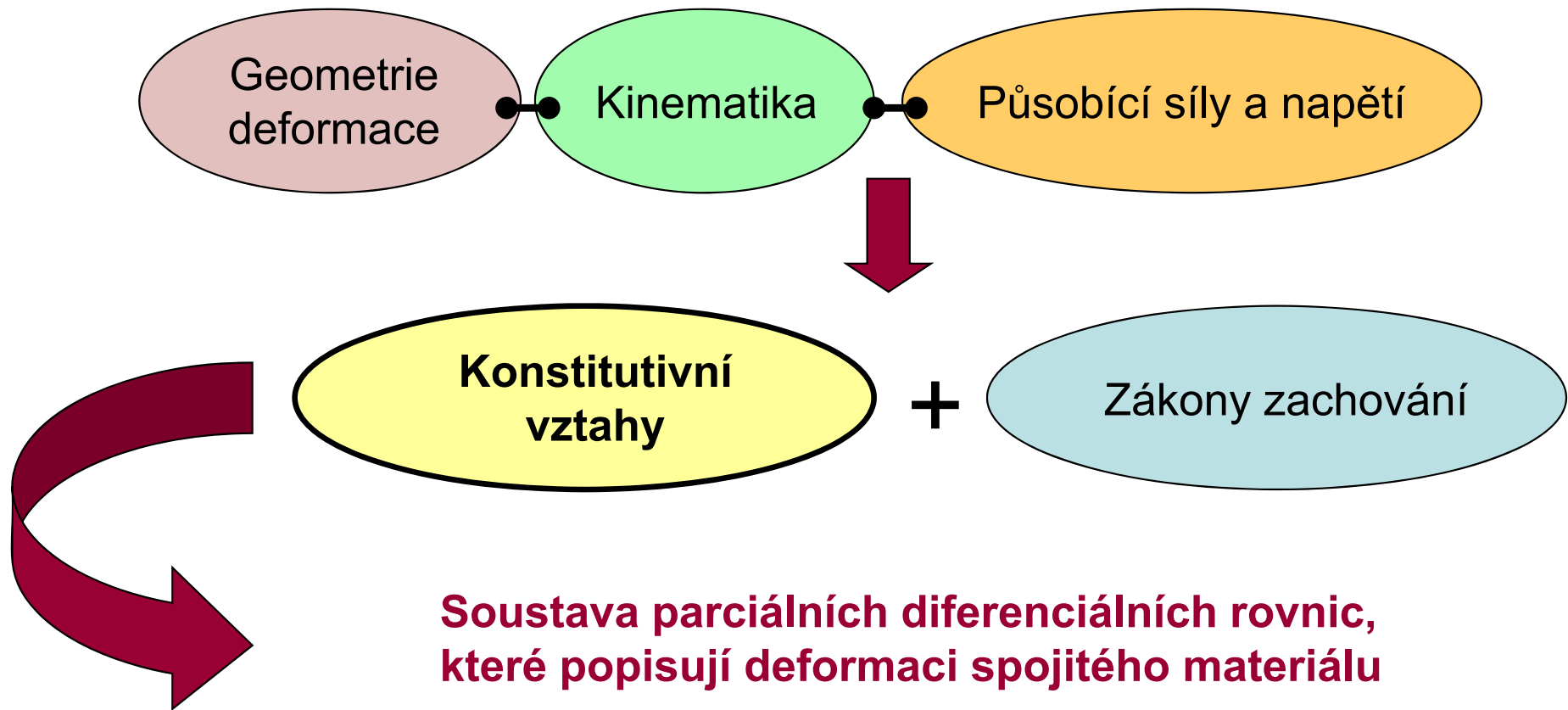




- Formální potřeba konstitutivních vztahů
- Jednoduché příklady „zúplnění“ systému rovnic
- Požadavky, které musí splňovat konstitutivní vztahy:
deterministický princip – objektivita – termodynamická kompatibilita
- Koncept objektivit
- Kinematická podmínka
- **Materiálové symetrie, homogenní a izotropní materiály**
- Termodynamická kompatibilita – použití Clausius-Duhemovy nerovnosti

Materiálová objektivita – opakování

$$\mathbf{t}(\vec{X}, t) = \mathcal{F}_{\tau \leq t} \left[\chi(\vec{X}, \tau), \mathbf{F}(\vec{X}, \tau), T(\vec{X}, \tau), \vec{G}(\vec{X}, \tau), \vec{X} \right] \leftarrow \text{jednoduché materiály}$$

Reologický vztah pro jednoduché materiály lze v materiálově objektivním tvaru vyjádřit jako

$$\mathbf{t}(\vec{X}, t) = \mathcal{F}_1 \left[\mathbf{F}(\vec{X}, \tau), T(\vec{X}, \tau), \vec{G}(\vec{X}, \tau), \vec{X} \right]$$

$$\mathbf{t}(\vec{X}, t) = \mathbf{R}(\vec{X}, t) \cdot \mathcal{F}_2 \left[\mathbf{U}(\vec{X}, \tau), T(\vec{X}, \tau), \vec{G}(\vec{X}, \tau), \vec{X} \right] \cdot \mathbf{R}^T(\vec{X}, t)$$

$$\mathbf{t}(\vec{X}, t) = \mathbf{R}(\vec{X}, t) \cdot \mathcal{F}_2 \left[\mathbf{C}(\vec{X}, \tau), T(\vec{X}, \tau), \vec{G}(\vec{X}, \tau), \vec{X} \right] \cdot \mathbf{R}^T(\vec{X}, t)$$

$$\mathbf{t}(\vec{X}, t) = \mathbf{F}(\vec{X}, t) \cdot \mathcal{F}_3 \left[\mathbf{C}(\vec{X}, \tau), T(\vec{X}, \tau), \vec{G}(\vec{X}, \tau), \vec{X} \right] \cdot \mathbf{F}^T(\vec{X}, t)$$

$$\mathbf{T}^{(2)}(\vec{X}, t) = \mathcal{G}_{\tau \leq t} \left[\mathbf{C}(\vec{X}, \tau), T(\vec{X}, \tau), \vec{G}(\vec{X}, \tau), \vec{X} \right]$$

$$\mathbf{t}(\vec{X}, t) = \mathcal{F}_1 \left[\mathbf{F}(\vec{X}, \tau), T(\vec{X}, \tau), \vec{G}(\vec{X}, \tau), \vec{X} \right] \leftarrow \begin{array}{l} \text{homogenní materiál} \\ \text{nezávisí explicitně na } \vec{X}. \end{array}$$

Materiálová symetrie

$$\vec{x} = \vec{\chi}_R(\vec{X}, t) = \vec{\chi}_{\hat{R}}(\hat{\vec{X}}, t) = \vec{\chi}_{\hat{R}}(\vec{\Lambda}(\vec{X}), t)$$

$$F_{kK} = \frac{\partial \chi_k}{\partial X_K} = \frac{\partial \chi_k}{\partial \Lambda_{\hat{L}}} \frac{\partial \Lambda_{\hat{L}}}{\partial X_K} = \hat{F}_{k\hat{L}} P_{\hat{L}K}$$

Neboli invariantně

$$\mathbf{F}(\vec{X}, t) = \hat{\mathbf{F}}(\hat{\vec{X}}, t) \cdot \mathbf{P}(\vec{X})$$

kde

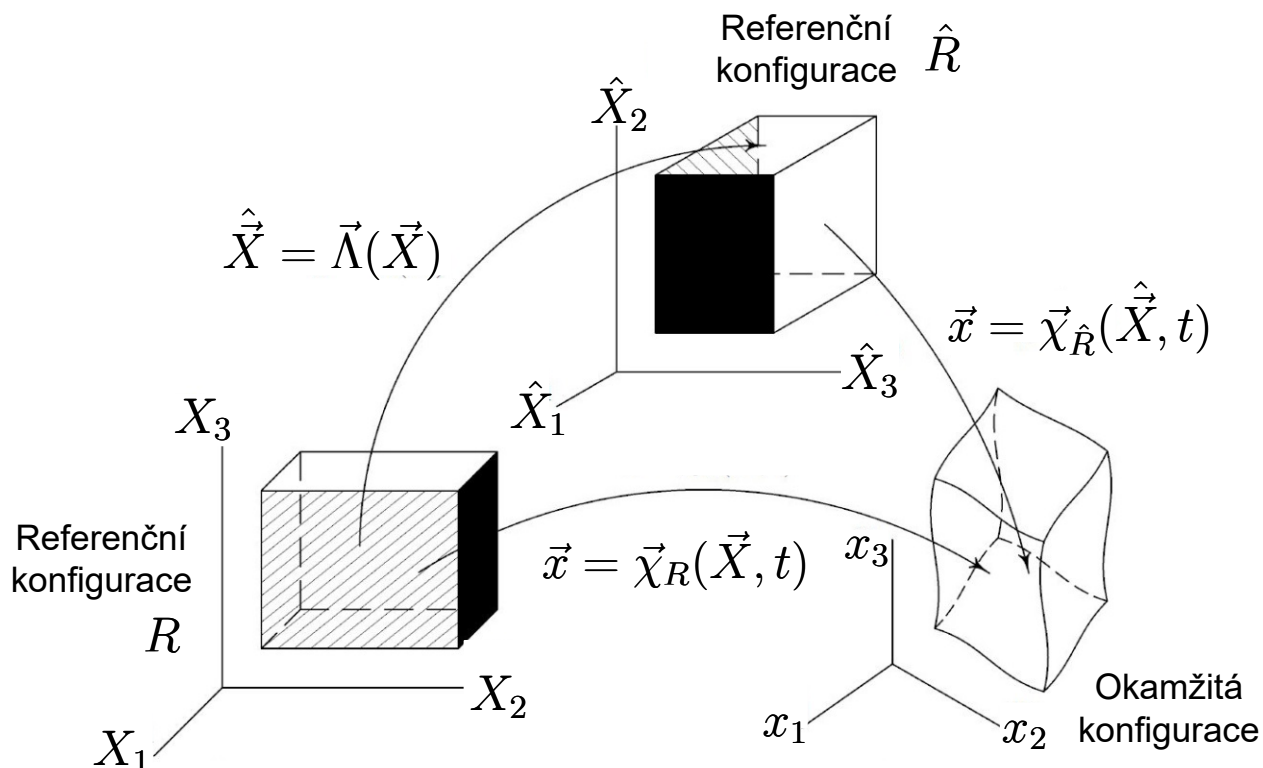
$$\hat{\mathbf{F}}(\hat{\vec{X}}, t) = \left(\text{Grad } \vec{\chi}_{\hat{R}}(\hat{\vec{X}}, t) \right)^T$$

$$\mathbf{P}(\vec{X}) = \left(\text{Grad } \vec{\Lambda}(\vec{X}) \right)^T$$

Analogicky

$$\vec{G}(\vec{X}, t) = \hat{\vec{G}}(\hat{\vec{X}}, t) \cdot \mathbf{P}(\vec{X})$$

$$T(\vec{X}, t) = \hat{T}(\hat{\vec{X}}, t)$$



Materiálová symetrie vzhledem k transformaci $\mathbf{P}$:

$$\mathcal{F}_R \left[\mathbf{F}(\vec{X}, \tau), T(\vec{X}, \tau), \vec{G}(\vec{X}, \tau) \right]_{\tau \leq t} = \mathcal{F}_R \left[\mathbf{F}(\vec{X}, \tau) \cdot \mathbf{P}(\vec{X}), T(\vec{X}, \tau), \vec{G}(\vec{X}, \tau) \cdot \mathbf{P}(\vec{X}) \right]_{\tau \leq t}$$

Podmínka materiálové objektivty:

$$\mathbf{O}(t) \cdot \mathcal{F}_{\tau \leq t} [\mathbf{F}(\vec{X}, \tau), T(\vec{X}, \tau), \vec{G}(\vec{X}, \tau), \vec{X}] \cdot \mathbf{O}^T(t) = \mathcal{F}_{\tau \leq t} [\mathbf{O}(\tau) \cdot \mathbf{F}(\vec{X}, \tau), T(\vec{X}, \tau), \vec{G}(\vec{X}, \tau), \vec{X}]$$

Materiálová symetrie:

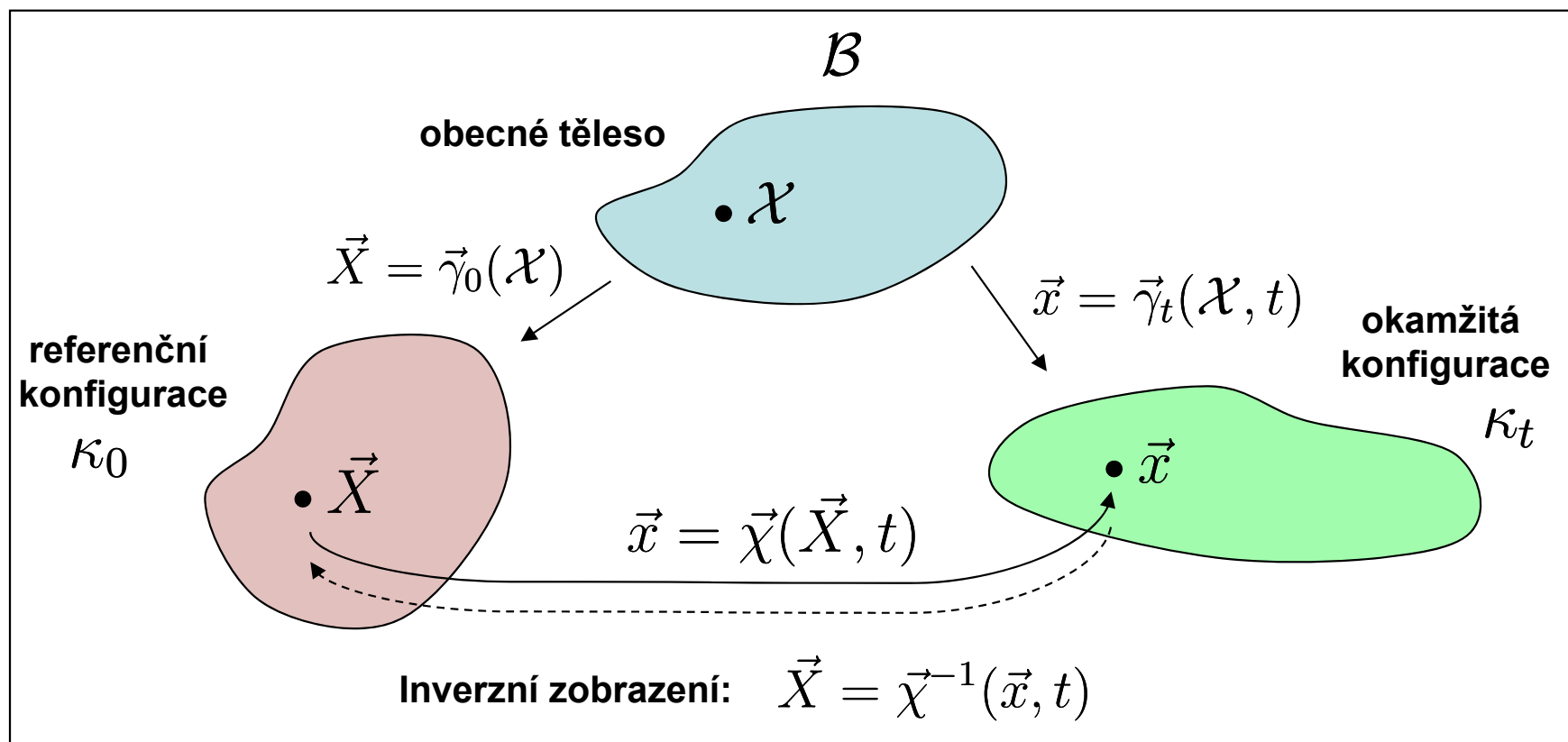
$$\mathcal{F}_{\tau \leq t} [\mathbf{F}(\vec{X}, \tau), T(\vec{X}, \tau), \vec{G}(\vec{X}, \tau)] = \mathcal{F}_{\tau \leq t} [\mathbf{F}(\vec{X}, \tau) \cdot \mathbf{P}(\vec{X}), T(\vec{X}, \tau), \vec{G}(\vec{X}, \tau) \cdot \mathbf{P}(\vec{X})]$$

Materiálová symetrie v redukovaném tvaru:

$$\mathbf{P} \cdot \mathcal{F}_{\tau \leq t} [\mathbf{C}, T, \vec{G}] \cdot \mathbf{P}^T = \mathcal{F}_{\tau \leq t} [\mathbf{P}^{-T} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{P}^{-1}, T, \vec{G} \cdot \mathbf{P}^{-1}]$$

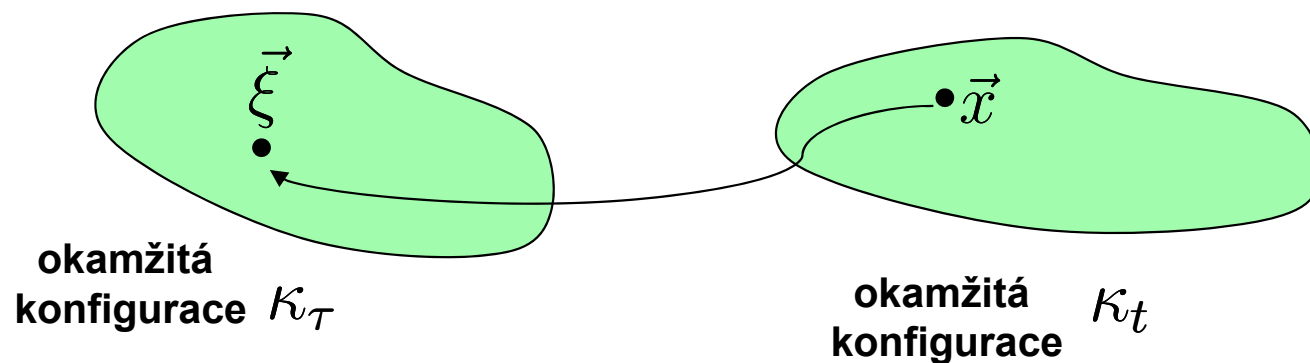
Izotropní tenzorová funkce:

$$\mathbf{Q} \cdot \mathbf{T}(\vec{v}, \mathbf{S}) \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{T}(\mathbf{Q} \cdot \vec{v}, \mathbf{Q} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{Q}^T)$$



Relativní pohyb mezi dvěma časovými okamžiky:

$$\vec{\xi} = \vec{\chi}(\vec{X}, \tau) = \vec{\chi}(\vec{\chi}^{-1}(\vec{x}, t), \tau) =: \vec{\chi}_t(\vec{x}, \tau)$$



Konstitutivní vztahy v relativním popisu – pokračování

$$\vec{\xi} = \vec{\chi}(\vec{X}, \tau), \quad \vec{x} = \vec{\chi}(\vec{X}, t), \quad \vec{X} = \vec{\chi}^{-1}(\vec{x}, t)$$

$$\vec{\xi} = \vec{\chi}(\vec{X}, \tau) = \vec{\chi}(\vec{\chi}^{-1}(\vec{x}, t), \tau) =: \vec{\chi}_t(\vec{x}, \tau)$$

← funkce relativního pohybu

$$\mathbf{F}_t(\vec{x}, \tau) := (\text{grad } \vec{\chi}_t(\vec{x}, \tau))^T, \quad (\mathbf{F}_t)_{kl} = \frac{\partial (\vec{\chi}_t)_k}{\partial x_l}$$

← relativní deformační gradient

Konstitutivní vztahy v relativním popisu – pokračování

$$\vec{\xi} = \vec{\chi}(\vec{X}, \tau), \quad \vec{x} = \vec{\chi}(\vec{X}, t), \quad \vec{X} = \vec{\chi}^{-1}(\vec{x}, t)$$

$$\vec{\xi} = \vec{\chi}(\vec{X}, \tau) = \vec{\chi}(\vec{\chi}^{-1}(\vec{x}, t), \tau) =: \vec{\chi}_t(\vec{x}, \tau)$$

← funkce relativního pohybu

$$\mathbf{F}_t(\vec{x}, \tau) := (\text{grad } \vec{\chi}_t(\vec{x}, \tau))^T, \quad (\mathbf{F}_t)_{kl} = \frac{\partial (\vec{\chi}_t)_k}{\partial x_l}$$

← relativní deformační gradient

$$\vec{\xi} = \vec{\chi}(\vec{X}, \tau) = \vec{\chi}_t(\vec{x}, \tau) = \vec{\chi}_t(\chi(\vec{X}, t), \tau)$$

$$\frac{\partial \chi_k(\vec{X}, \tau)}{\partial X_K} = \frac{\partial (\vec{\chi}_t)_k(\vec{x}, \tau)}{\partial x_l} \frac{\partial \chi_l(\vec{X}, t)}{\partial X_K}$$

$$\mathbf{F}(\vec{X}, \tau) = \mathbf{F}_t(\vec{x}, \tau) \cdot \mathbf{F}(\vec{X}, t) \quad \text{resp.} \quad \mathbf{F}_t(\vec{x}, \tau) = \mathbf{F}(\vec{X}, \tau) \cdot \mathbf{F}^{-1}(\vec{X}, t)$$

Konstitutivní vztahy v relativním popisu – pokračování

$$\vec{\xi} = \vec{\chi}(\vec{X}, \tau), \quad \vec{x} = \vec{\chi}(\vec{X}, t), \quad \vec{X} = \vec{\chi}^{-1}(\vec{x}, t)$$

$$\vec{\xi} = \vec{\chi}(\vec{X}, \tau) = \vec{\chi}(\vec{\chi}^{-1}(\vec{x}, t), \tau) =: \vec{\chi}_t(\vec{x}, \tau)$$

← funkce relativního pohybu

$$\mathbf{F}_t(\vec{x}, \tau) := (\text{grad } \vec{\chi}_t(\vec{x}, \tau))^T, \quad (\mathbf{F}_t)_{kl} = \frac{\partial (\vec{\chi}_t)_k}{\partial x_l}$$

← relativní deformační gradient

$$\vec{\xi} = \vec{\chi}(\vec{X}, \tau) = \vec{\chi}_t(\vec{x}, \tau) = \vec{\chi}_t(\chi(\vec{X}, t), \tau)$$

$$\frac{\partial \chi_k(\vec{X}, \tau)}{\partial X_K} = \frac{\partial (\vec{\chi}_t)_k(\vec{x}, \tau)}{\partial x_l} \frac{\partial \chi_l(\vec{X}, t)}{\partial X_K}$$

$$\mathbf{F}(\vec{X}, \tau) = \mathbf{F}_t(\vec{x}, \tau) \cdot \mathbf{F}(\vec{X}, t) \quad \text{resp.} \quad \mathbf{F}_t(\vec{x}, \tau) = \mathbf{F}(\vec{X}, \tau) \cdot \mathbf{F}^{-1}(\vec{X}, t)$$

$$\tau = t \Rightarrow \mathbf{F}_t(\vec{x}, \tau) = \mathbf{I}$$

$$\mathbf{C}(\vec{X}, \tau) = \mathbf{F}^T(\vec{X}, \tau) \cdot \mathbf{F}(\vec{X}, \tau) = \left(\mathbf{F}^T(\vec{X}, t) \cdot \underbrace{\mathbf{F}_t^T(\vec{x}, \tau)}_{\mathbf{F}_t^T(\vec{x}, \tau) \cdot \mathbf{F}_t(\vec{x}, \tau) =: \mathbf{c}_t(\vec{x}, \tau)} \right) \cdot \left(\mathbf{F}_t(\vec{x}, \tau) \cdot \mathbf{F}(\vec{X}, t) \right)$$

$\mathbf{F}_t^T(\vec{x}, \tau) \cdot \mathbf{F}_t(\vec{x}, \tau) =: \mathbf{c}_t(\vec{x}, \tau)$ ← relativní Greenův deformační tenzor

$$\mathbf{C}(\vec{X}, \tau) = \mathbf{F}^T(\vec{X}, t) \cdot \mathbf{c}_t(\vec{x}, \tau) \cdot \mathbf{F}(\vec{X}, t)$$

Konstitutivní vztahy v relativním popisu – pokračování

Použitím následujících vztahů (polární rozklad, Geometrie deformace str. 10-11)

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U}, \quad \mathbf{U} = \mathbf{U}^T \quad \text{a} \quad \mathbf{C} = \mathbf{U}^2$$

dostaneme

$$\mathbf{C}(\vec{X}, \tau) = \mathbf{F}^T(\vec{X}, t) \cdot \mathbf{c}_t(\vec{x}, \tau) \cdot \mathbf{F}(\vec{X}, t) = \mathbf{U} \cdot \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{c}_t(\vec{x}, \tau) \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \sqrt{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{c}_t(\vec{x}, \tau) \cdot \mathbf{R} \cdot \sqrt{\mathbf{C}} \quad \star$$

a analogicky

$$\vec{G}(\vec{X}, \tau) = \mathbf{F}^T(\vec{X}, t) \cdot \vec{g}_t(\vec{x}, \tau) = \mathbf{U} \cdot \mathbf{R}^T \cdot \vec{g}_t(\vec{x}, \tau) = \sqrt{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{R}^T \cdot \vec{g}_t(\vec{x}, \tau) \quad \star$$

Konstitutivní vztahy v relativním popisu – pokračování

Použitím následujících vztahů (polární rozklad, Geometrie deformace str. 10-11)

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U}, \quad \mathbf{U} = \mathbf{U}^T \quad \text{a} \quad \mathbf{C} = \mathbf{U}^2$$

dostaneme

$$\mathbf{C}(\vec{X}, \tau) = \mathbf{F}^T(\vec{X}, t) \cdot \mathbf{c}_t(\vec{x}, \tau) \cdot \mathbf{F}(\vec{X}, t) = \mathbf{U} \cdot \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{c}_t(\vec{x}, \tau) \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \sqrt{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{c}_t(\vec{x}, \tau) \cdot \mathbf{R} \cdot \sqrt{\mathbf{C}} \quad \star$$

a analogicky

$$\vec{G}(\vec{X}, \tau) = \mathbf{F}^T(\vec{X}, t) \cdot \vec{g}_t(\vec{x}, \tau) = \mathbf{U} \cdot \mathbf{R}^T \cdot \vec{g}_t(\vec{x}, \tau) = \sqrt{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{R}^T \cdot \vec{g}_t(\vec{x}, \tau) \quad \star$$

Používáme zde zkrácenou notaci, kdy vynecháváme argumenty $\vec{X}$ a t : $\mathbf{C} = \mathbf{C}(\vec{X}, t)$

Nyní použijeme konstitutivní vztah v redukovaném tvaru, pro homogenní materiál:

$$\mathbf{t}(\vec{X}, t) = \mathbf{R}(\vec{X}, t) \cdot \mathcal{F}_{\tau \leq t} \left[\mathbf{C}(\vec{X}, \tau), T(\vec{X}, \tau), \vec{G}(\vec{X}, \tau) \right] \cdot \mathbf{R}^T(\vec{X}, t)$$

Konstitutivní vztahy v relativním popisu – pokračování

Použitím následujících vztahů (polární rozklad, Geometrie deformace str. 10-11)

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U}, \quad \mathbf{U} = \mathbf{U}^T \quad \text{a} \quad \mathbf{C} = \mathbf{U}^2$$

dostaneme

$$\mathbf{C}(\vec{X}, \tau) = \mathbf{F}^T(\vec{X}, t) \cdot \mathbf{c}_t(\vec{x}, \tau) \cdot \mathbf{F}(\vec{X}, t) = \mathbf{U} \cdot \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{c}_t(\vec{x}, \tau) \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \sqrt{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{c}_t(\vec{x}, \tau) \cdot \mathbf{R} \cdot \sqrt{\mathbf{C}} \quad \star$$

a analogicky

$$\vec{G}(\vec{X}, \tau) = \mathbf{F}^T(\vec{X}, t) \cdot \vec{g}_t(\vec{x}, \tau) = \mathbf{U} \cdot \mathbf{R}^T \cdot \vec{g}_t(\vec{x}, \tau) = \sqrt{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{R}^T \cdot \vec{g}_t(\vec{x}, \tau) \quad \star$$

Používáme zde zkrácenou notaci, kdy vynecháváme argumenty $\vec{X}$ a t : $\mathbf{C} = \mathbf{C}(\vec{X}, t)$

Nyní použijeme konstitutivní vztah v redukovaném tvaru, pro homogenní materiál:

$$\mathbf{t}(\vec{X}, t) = \mathbf{R}(\vec{X}, t) \cdot \mathcal{F}_{\tau \leq t} \left[\mathbf{C}(\vec{X}, \tau), T(\vec{X}, \tau), \vec{G}(\vec{X}, \tau) \right] \cdot \mathbf{R}^T(\vec{X}, t)$$

Po dosazení $\star$

$$\mathbf{t} = \mathbf{R} \cdot \mathcal{F}_{\tau \leq t} \left[\sqrt{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{c}_t(\vec{x}, \tau) \cdot \mathbf{R} \cdot \sqrt{\mathbf{C}}, T(\vec{x}, \tau), \sqrt{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{R}^T \cdot \vec{g}_t(\vec{x}, \tau) \right] \cdot \mathbf{R}^T$$

což můžeme alternativně vyjádřit také jako

$$\mathbf{t} = \mathbf{R} \cdot \mathcal{F}_{\tau \leq t} \left[\mathbf{R}^T \cdot \mathbf{c}_t(\vec{x}, \tau) \cdot \mathbf{R}, T(\vec{x}, \tau), \mathbf{R}^T \cdot \vec{g}_t(\vec{x}, \tau), \mathbf{C} \right] \cdot \mathbf{R}^T$$

Konstitutivní vztahy v relativním popisu – pokračování

Konstitutivní
vztahy 23

Zaměříme se nyní na *homogenní izotropní kapaliny*, tj. materiály s nejvyšší mírou materiálové symetrie. Nejprve se zabývejme otázkou izotropie.

Konstitutivní vztahy v relativním popisu – pokračování

Zaměříme se nyní na *homogenní izotropní kapaliny*, tj. materiály s nejvyšší mírou materiálové symetrie. Nejprve se zabývejme otázkou izotropie.

Izotropní skalární funkce: $a(\vec{v}, \mathbf{S}) = a(\mathbf{Q} \cdot \vec{v}, \mathbf{Q} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{Q}^T)$

Izotropní tenzorová funkce: $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{T}(\vec{v}, \mathbf{S}) \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{T}(\mathbf{Q} \cdot \vec{v}, \mathbf{Q} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{Q}^T)$

Požadujeme, aby funkcionál

$$\mathbf{t} = \mathbf{R} \cdot \mathcal{F}_{\tau \leq t} [\mathbf{R}^T \cdot \mathbf{c}_t(\vec{x}, \tau) \cdot \mathbf{R}, T(\vec{x}, \tau), \mathbf{R}^T \cdot \vec{g}_t(\vec{x}, \tau), \mathbf{C}] \cdot \mathbf{R}^T$$

byl izotropní:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} \cdot \mathcal{F}_{\tau \leq t} [\mathbf{R}^T \cdot \mathbf{c}_t(\vec{x}, \tau) \cdot \mathbf{R}, T(\vec{x}, \tau), \mathbf{R}^T \cdot \vec{g}_t(\vec{x}, \tau), \mathbf{C}] \cdot \mathbf{Q}^T = \\ = \mathcal{F}_{\tau \leq t} [\mathbf{Q} \cdot \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{c}_t(\vec{x}, \tau) \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{Q}^T, T(\vec{x}, \tau), \mathbf{Q} \cdot \mathbf{R}^T \cdot \vec{g}_t(\vec{x}, \tau), \mathbf{Q} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{Q}^T] \end{aligned}$$

Konstitutivní vztahy v relativním popisu – pokračování

Zaměříme se nyní na *homogenní izotropní kapaliny*, tj. materiály s nejvyšší mírou materiálové symetrie. Nejprve se zabýváme otázkou izotropie.

Izotropní skalární funkce: $a(\vec{v}, \mathbf{S}) = a(\mathbf{Q} \cdot \vec{v}, \mathbf{Q} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{Q}^T)$

Izotropní tenzorová funkce: $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{T}(\vec{v}, \mathbf{S}) \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{T}(\mathbf{Q} \cdot \vec{v}, \mathbf{Q} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{Q}^T)$

Požadujeme, aby funkcionál

$$\mathbf{t} = \mathbf{R} \cdot \mathcal{F}_{\tau \leq t} [\mathbf{R}^T \cdot \mathbf{c}_t(\vec{x}, \tau) \cdot \mathbf{R}, T(\vec{x}, \tau), \mathbf{R}^T \cdot \vec{g}_t(\vec{x}, \tau), \mathbf{C}] \cdot \mathbf{R}^T$$

byl izotropní:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} \cdot \mathcal{F}_{\tau \leq t} [\mathbf{R}^T \cdot \mathbf{c}_t(\vec{x}, \tau) \cdot \mathbf{R}, T(\vec{x}, \tau), \mathbf{R}^T \cdot \vec{g}_t(\vec{x}, \tau), \mathbf{C}] \cdot \mathbf{Q}^T = \\ = \mathcal{F}_{\tau \leq t} [\mathbf{Q} \cdot \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{c}_t(\vec{x}, \tau) \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{Q}^T, T(\vec{x}, \tau), \mathbf{Q} \cdot \mathbf{R}^T \cdot \vec{g}_t(\vec{x}, \tau), \mathbf{Q} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{Q}^T] \end{aligned}$$

Neboť $\vec{X}$ a t jsou v relativním popisu fixovány, můžeme zvolit $\mathbf{Q}(\vec{X}) = \mathbf{R}(\vec{X}, t)$.

$$\begin{aligned} \mathbf{R} \cdot \mathcal{F}_{\tau \leq t} [\mathbf{R}^T \cdot \mathbf{c}_t(\vec{x}, \tau) \cdot \mathbf{R}, T(\vec{x}, \tau), \mathbf{R}^T \cdot \vec{g}_t(\vec{x}, \tau), \mathbf{C}] \cdot \mathbf{R}^T = \\ = \mathcal{F}_{\tau \leq t} [\mathbf{c}_t(\vec{x}, \tau), T(\vec{x}, \tau), \vec{g}_t(\vec{x}, \tau), \mathbf{R} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{R}^T] \end{aligned}$$

Konstitutivní vztahy v relativním popisu – pokračování

$$\underbrace{\mathbf{R} \cdot \mathcal{F}_{\tau \leq t} [\mathbf{R}^T \cdot \mathbf{c}_t(\vec{x}, \tau) \cdot \mathbf{R}, T(\vec{x}, \tau), \mathbf{R}^T \cdot \vec{g}_t(\vec{x}, \tau), \mathbf{C}] \cdot \mathbf{R}^T}_{\mathbf{t}(\vec{X}, t)} = \mathcal{F}_{\tau \leq t} [\mathbf{c}_t(\vec{x}, \tau), T(\vec{x}, \tau), \vec{g}_t(\vec{x}, \tau), \underbrace{\mathbf{R} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{R}^T}_{\mathbf{R} \cdot \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{R}^T = \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} = \mathbf{b}}]$$



$$\mathbf{t} = \mathcal{F}_{\tau \leq t} [\mathbf{c}_t(\vec{x}, \tau), T(\vec{x}, \tau), \vec{g}_t(\vec{x}, \tau), \mathbf{b}]$$

konstitutivní rovnice pro jednoduché homogenní
izotropní materiály v relativním popisu

Konstitutivní vztahy v relativním popisu – pokračování

$$\underbrace{\mathbf{R} \cdot \mathcal{F}_{\tau \leq t} [\mathbf{R}^T \cdot \mathbf{c}_t(\vec{x}, \tau) \cdot \mathbf{R}, T(\vec{x}, \tau), \mathbf{R}^T \cdot \vec{g}_t(\vec{x}, \tau), \mathbf{C}] \cdot \mathbf{R}^T}_{\mathbf{t}(\vec{X}, t)} = \mathcal{F}_{\tau \leq t} [\mathbf{c}_t(\vec{x}, \tau), T(\vec{x}, \tau), \vec{g}_t(\vec{x}, \tau), \underbrace{\mathbf{R} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{R}^T}_{\mathbf{R} \cdot \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{R}^T}]$$

$$= \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} = \mathbf{b}$$



$$\mathbf{t} = \mathcal{F}_{\tau \leq t} [\mathbf{c}_t(\vec{x}, \tau), T(\vec{x}, \tau), \vec{g}_t(\vec{x}, \tau), \mathbf{b}]$$

konstitutivní rovnice pro jednoduché homogenní izotropní materiály v relativním popisu

Zbývá ukázat, že konstitutivní rovnice je invariantní vůči libovolné ortogonální transformaci referenční konfigurace, a nikoliv pouze pro $\mathbf{Q}(\vec{X}) = \mathbf{R}(\vec{X}, t)$. Důkaz je triviální, neboť $\mathbf{c}_t$ nezávisí na referenční konfiguraci a pro Fingerův deformační tenzor máme

$$\hat{\mathbf{b}} = \hat{\mathbf{F}} \cdot \hat{\mathbf{F}}^T = (\mathbf{F} \cdot \mathbf{Q}^T) \cdot (\mathbf{F} \cdot \mathbf{Q}^T)^T = (\mathbf{F} \cdot \mathbf{Q}^T) \cdot (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{F}^T) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T = \mathbf{b}$$

kde jsme použili $\mathbf{F} = \hat{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{Q}$ (viz str. 19).

Konstitutivní vztahy v relativním popisu – pokračování

Chceme nyní, aby konstitutivní rovnice byla invariantní vůči unimodulární transformaci $\mathbf{H}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{t} &= \mathcal{F}_{\tau \leq t} [\mathbf{c}_t(\vec{x}, \tau), T(\vec{x}, \tau), \vec{g}_t(\vec{x}, \tau), \mathbf{b}] = \mathcal{F}_{\tau \leq t} [\mathbf{c}_t(\vec{x}, \tau), T(\vec{x}, \tau), \vec{g}_t(\vec{x}, \tau), \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T] \\ &= \mathcal{F}_{\tau \leq t} [\mathbf{c}_t(\vec{x}, \tau), T(\vec{x}, \tau), \vec{g}_t(\vec{x}, \tau), \mathbf{F} \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^T \cdot \mathbf{F}^T] \quad \star\end{aligned}$$

Konstitutivní vztahy v relativním popisu – pokračování

Chceme nyní, aby konstitutivní rovnice byla invariantní vůči unimodulární transformaci $\mathbf{H}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{t} &= \mathcal{F}_{\tau \leq t} [\mathbf{c}_t(\vec{x}, \tau), T(\vec{x}, \tau), \vec{g}_t(\vec{x}, \tau), \mathbf{b}] = \mathcal{F}_{\tau \leq t} [\mathbf{c}_t(\vec{x}, \tau), T(\vec{x}, \tau), \vec{g}_t(\vec{x}, \tau), \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T] \\ &= \mathcal{F}_{\tau \leq t} [\mathbf{c}_t(\vec{x}, \tau), T(\vec{x}, \tau), \vec{g}_t(\vec{x}, \tau), \mathbf{F} \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^T \cdot \mathbf{F}^T] \quad \star \end{aligned}$$

Zvolme specifickou unimodulární transformaci

$$\mathbf{H} = (\det \mathbf{F})^{1/3} \mathbf{F}^{-1} = \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^{1/3} \mathbf{F}^{-1}$$

kde jsme použili zákon zachování hmoty ve tvaru $\rho_0 = \rho J = \rho \det \mathbf{F}$.

Snadno se přesvědčíme o tom, že zvolená transformace je skutečně unimodulární:

$$\det \mathbf{H} = [(\det \mathbf{F})^{1/3}]^3 \det \mathbf{F}^{-1} = 1$$

Nyní můžeme spočítat výraz v $\star$:

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^T \cdot \mathbf{F}^T = \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^{2/3} \mathbf{I}$$

Odtud:

$\mathbf{t} = \mathcal{F}_{\tau \leq t} [\mathbf{c}_t(\vec{x}, \tau), T(\vec{x}, \tau), \vec{g}_t(\vec{x}, \tau), \rho]$	konstitutivní rovnice pro jednoduché tekutiny v relativním popisu
--	--

Materiály s omezenou pamětí

Budeme předpokládat, že deformační a teplotní události ve vzdálené minulosti mají jen omezený vliv na teplotně-deformační vývoj v současnosti.

Uvažujme Taylorův rozvoj a aplikujme jej na veličiny v konstitutivních vztazích:

$$h(\vec{X}, \tau) = \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} \left(\frac{\partial^n h(\vec{X}, \tau)}{\partial \tau^n} \right)_{\tau=t} (\tau - t)^n = \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} \underline{h^{(n)}(\vec{X}, t)} (\tau - t)^n$$

Materiálový vztah ve tvaru *funkcionálu*

$$\mathbf{T}^{(2)}(\vec{X}, t) = \mathcal{G}_{\tau \leq t} \left[\mathbf{C}(\vec{X}, \tau), T(\vec{X}, \tau), \vec{G}(\vec{X}, \tau) \right]$$

pak může být vyjádřen ve tvaru *funkce*

$$\mathbf{T}^{(2)}(\vec{X}, t) = \tilde{\mathbf{T}}^{(2)} \left(\mathbf{C}, \dot{\mathbf{C}}, \dots, \overset{(N)}{\mathbf{C}}, T, \dot{T}, \dots, \overset{(N)}{T}, \vec{G}, \dot{\vec{G}}, \dots, \overset{(N)}{\vec{G}} \right) \quad \begin{array}{l} \text{materiál rychlostního typu} \\ \longleftarrow \text{stupně } N \end{array}$$

Pro homogenní izotropní tekutinu v referenční popisu pak *funkcionál* $\mathbf{t} = \mathcal{F}_{\tau \leq t} [\mathbf{c}_t, T(\vec{x}, \tau), \vec{g}_t(\vec{x}, \tau), \rho]$ přejde ve *funkci*

$$\mathbf{t} = \tilde{\mathbf{t}} \left(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_N, T, \dot{T}, \dots, \overset{N}{T}, \vec{g}_t, \dot{\vec{g}}_t, \dots, \overset{N}{\vec{g}}_t, \rho \right)$$

kde

$$\mathbf{a}_n(\vec{x}, t) = \left(\frac{\partial^n \mathbf{c}_t(\vec{x}, \tau)}{\partial \tau^n} \right)_{\tau=t} . \quad \text{Nultý člen lze vynechat, neboť } \mathbf{a}_0 = \mathbf{I} \text{ (viz str. 21).}$$

Příklad: Hookův zákon

Konstitutivní vztah pro izotropní elastický materiál je dán předpisem $\mathbf{t} = a_0 \mathbf{I} + a_1 \mathbf{b} + a_2 \mathbf{b}^2$.

Předpokládejme, že deformace je malá, tj. $\mathbf{b} = \mathbf{I} + 2\tilde{\mathbf{e}}$, kde $\tilde{\mathbf{e}} = \frac{1}{2} (\mathbf{h} + \mathbf{h}^T) = \frac{1}{2} \left[\text{grad } \vec{u} + (\text{grad } \vec{u})^T \right]$.

Zanedbáme-li členy vyššího řádu, pak máme

$$\mathbf{b}^2 = \mathbf{I} + 4\tilde{\mathbf{e}}, \quad I_b = 3 + 2 \text{tr } \tilde{\mathbf{e}}, \quad II_b = 3 + 4 \text{tr } \tilde{\mathbf{e}}, \quad III_b = 1 + 2 \text{tr } \tilde{\mathbf{e}},$$

a napěťový tenzor můžeme vyjádřit ve tvaru

$$\mathbf{t} = a_0 \mathbf{I} + a_1 \mathbf{b} + a_2 \mathbf{b}^2 \approx k_0 \mathbf{I} + k_1 (\text{tr } \tilde{\mathbf{e}}) \mathbf{I} + 2k_2 \tilde{\mathbf{e}}.$$

kde k_i jsou konstanty. Odtud

$$\mathbf{t} = \lambda (\text{div } \vec{u}) \mathbf{I} + \mu \left[\text{grad } \vec{u} + (\text{grad } \vec{u})^T \right] \quad \leftarrow \text{Hookův zákon}$$

Příklad: Viskózní kapalina

Příklad: Hookův zákon

Konstitutivní vztah pro izotropní elastický materiál je dán předpisem $\mathbf{t} = a_0 \mathbf{I} + a_1 \mathbf{b} + a_2 \mathbf{b}^2$.

Předpokládejme, že deformace je malá, tj. $\mathbf{b} = \mathbf{I} + 2\tilde{\mathbf{e}}$, kde $\tilde{\mathbf{e}} = \frac{1}{2} (\mathbf{h} + \mathbf{h}^T) = \frac{1}{2} [\text{grad } \vec{u} + (\text{grad } \vec{u})^T]$.

Zanedbáme-li členy vyššího řádu, pak máme

$$\mathbf{b}^2 = \mathbf{I} + 4\tilde{\mathbf{e}}, \quad I_b = 3 + 2 \text{tr } \tilde{\mathbf{e}}, \quad II_b = 3 + 4 \text{tr } \tilde{\mathbf{e}}, \quad III_b = 1 + 2 \text{tr } \tilde{\mathbf{e}},$$

a napěťový tenzor můžeme vyjádřit ve tvaru

$$\mathbf{t} = a_0 \mathbf{I} + a_1 \mathbf{b} + a_2 \mathbf{b}^2 \approx k_0 \mathbf{I} + k_1 (\text{tr } \tilde{\mathbf{e}}) \mathbf{I} + 2k_2 \tilde{\mathbf{e}}.$$

kde k_i jsou konstanty. Odtud

$$\mathbf{t} = \lambda (\text{div } \vec{u}) \mathbf{I} + \mu [\text{grad } \vec{u} + (\text{grad } \vec{u})^T] \quad \leftarrow \text{Hookův zákon}$$

Příklad: Viskózní kapalina

Použijeme konstitutivní vztah pro izotropní tekutinu s omezenou pamětí v referenčním popisu

$$\mathbf{t} = \tilde{\mathbf{t}} \left(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_N, T, \dot{T}, \dots, \overset{N}{T}, \vec{g}_t, \dot{\vec{g}}_t, \dots, \overset{N}{\vec{g}}_t, \rho \right) \rightarrow \mathbf{t} = \hat{\mathbf{t}}(\mathbf{a}_1, \rho)$$

Příklad: Hookův zákon

Konstitutivní vztah pro izotropní elastický materiál je dán předpisem $\mathbf{t} = a_0 \mathbf{I} + a_1 \mathbf{b} + a_2 \mathbf{b}^2$.

Předpokládejme, že deformace je malá, tj. $\mathbf{b} = \mathbf{I} + 2\tilde{\mathbf{e}}$, kde $\tilde{\mathbf{e}} = \frac{1}{2} (\mathbf{h} + \mathbf{h}^T) = \frac{1}{2} [\text{grad } \vec{u} + (\text{grad } \vec{u})^T]$.

Zanedbáme-li členy vyššího řádu, pak máme

$$\mathbf{b}^2 = \mathbf{I} + 4\tilde{\mathbf{e}}, \quad I_b = 3 + 2 \text{tr } \tilde{\mathbf{e}}, \quad II_b = 3 + 4 \text{tr } \tilde{\mathbf{e}}, \quad III_b = 1 + 2 \text{tr } \tilde{\mathbf{e}},$$

a napětový tenzor můžeme vyjádřit ve tvaru

$$\mathbf{t} = a_0 \mathbf{I} + a_1 \mathbf{b} + a_2 \mathbf{b}^2 \approx k_0 \mathbf{I} + k_1 (\text{tr } \tilde{\mathbf{e}}) \mathbf{I} + 2k_2 \tilde{\mathbf{e}}.$$

kde k_i jsou konstanty. Odtud

$$\mathbf{t} = \lambda (\text{div } \vec{u}) \mathbf{I} + \mu [\text{grad } \vec{u} + (\text{grad } \vec{u})^T] \quad \leftarrow \text{Hookův zákon}$$

Příklad: Viskózní kapalina

Použijeme konstitutivní vztah pro izotropní tekutinu s omezenou pamětí v referenčním popisu

$$\mathbf{t} = \tilde{\mathbf{t}} \left(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_N, T, \dot{T}, \dots, \overset{N}{T}, \vec{g}_t, \dot{\vec{g}}_t, \dots, \overset{N}{\vec{g}}_t, \rho \right) \rightarrow \mathbf{t} = \hat{\mathbf{t}}(\mathbf{a}_1, \rho)$$

Použijeme izotropní reprezentaci a všimneme si, že

$$\mathbf{a}_1 = \left(\frac{\partial \mathbf{c}_t}{\partial \tau} \right)_{\tau=t} = 2\mathbf{d}$$

Příklad: Hookův zákon

Konstitutivní vztah pro izotropní elastický materiál je dán předpisem $\mathbf{t} = a_0 \mathbf{I} + a_1 \mathbf{b} + a_2 \mathbf{b}^2$.

Předpokládejme, že deformace je malá, tj. $\mathbf{b} = \mathbf{I} + 2\tilde{\mathbf{e}}$, kde $\tilde{\mathbf{e}} = \frac{1}{2} (\mathbf{h} + \mathbf{h}^T) = \frac{1}{2} [\text{grad } \vec{u} + (\text{grad } \vec{u})^T]$.

Zanedbáme-li členy vyššího řádu, pak máme

$$\mathbf{b}^2 = \mathbf{I} + 4\tilde{\mathbf{e}}, \quad I_b = 3 + 2 \text{tr } \tilde{\mathbf{e}}, \quad II_b = 3 + 4 \text{tr } \tilde{\mathbf{e}}, \quad III_b = 1 + 2 \text{tr } \tilde{\mathbf{e}},$$

a napěťový tenzor můžeme vyjádřit ve tvaru

$$\mathbf{t} = a_0 \mathbf{I} + a_1 \mathbf{b} + a_2 \mathbf{b}^2 \approx k_0 \mathbf{I} + k_1 (\text{tr } \tilde{\mathbf{e}}) \mathbf{I} + 2k_2 \tilde{\mathbf{e}}.$$

kde k_i jsou konstanty. Odtud

$$\mathbf{t} = \lambda (\text{div } \vec{u}) \mathbf{I} + \mu [\text{grad } \vec{u} + (\text{grad } \vec{u})^T] \quad \leftarrow \text{Hookův zákon}$$

Příklad: Viskózní kapalina

Použijeme konstitutivní vztah pro izotropní tekutinu s omezenou pamětí v referenčním popisu

$$\mathbf{t} = \tilde{\mathbf{t}} \left(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_N, T, \dot{T}, \dots, \overset{N}{T}, \vec{g}_t, \dot{\vec{g}}_t, \dots, \overset{N}{\vec{g}}_t, \rho \right) \rightarrow \mathbf{t} = \hat{\mathbf{t}}(\mathbf{a}_1, \rho)$$

Použijeme izotropní reprezentaci a všimneme si, že

$$\mathbf{a}_1 = \left(\frac{\partial \mathbf{c}_t}{\partial \tau} \right)_{\tau=t} = 2\mathbf{d}$$

takže

$$\mathbf{t} = a_0 \mathbf{I} + 2a_1 \mathbf{d} + a_2 \mathbf{d}^2, \quad \text{kde } a_i = a_i(\rho, I_d, II_d, III_d) \quad \leftarrow \text{neneutronovská (Stokesova) kapalina}$$

↑
viskozita

Příklad: Newtonovská viskózní kapalina

U řady kapalin je experimentálně pozorován lineární vztah mezi tenzorem napětí $\mathbf{t}$ a tenzorem $\mathbf{d}$. Tyto kapaliny se označují jako **newtonovské**.

Příklad: Newtonovská viskózní kapalina

U řady kapalin je experimentálně pozorován lineární vztah mezi tenzorem napětí $\mathbf{t}$ a tenzorem $\mathbf{d}$. Tyto kapaliny se označují jako **newtonovské**.

$$\mathbf{t} = a_0 \mathbf{I} + 2a_1 \mathbf{d} + a_2 \mathbf{d}^2, \quad \text{kde } a_i = a_i(\rho, I_d, II_d, III_d) \quad \leftarrow \text{obecná kapalina}$$

Příklad: Newtonovská viskózní kapalina

U řady kapalin je experimentálně pozorován lineární vztah mezi tenzorem napětí $\mathbf{t}$ a tenzorem $\mathbf{d}$. Tyto kapaliny se označují jako **newtonovské**.

$$\mathbf{t} = a_0 \mathbf{I} + 2a_1 \mathbf{d} + a_2 \mathbf{d}^2, \quad \text{kde } a_i = a_i(\rho, I_d, II_d, III_d) \quad \leftarrow \text{obecná kapalina}$$

Aby tento vztah byl lineární, materiálové koeficienty musí být zvoleny následovně

$$a_0 = \xi(\rho) \operatorname{tr} \mathbf{d}, \quad a_1 = \eta(\rho), \quad a_2 = 0$$

Příklad: Newtonovská viskózní kapalina

U řady kapalin je experimentálně pozorován lineární vztah mezi tenzorem napětí $\mathbf{t}$ a tenzorem $\mathbf{d}$. Tyto kapaliny se označují jako **newtonovské**.

$$\mathbf{t} = a_0 \mathbf{I} + 2a_1 \mathbf{d} + a_2 \mathbf{d}^2, \quad \text{kde } a_i = a_i(\rho, I_d, II_d, III_d) \quad \leftarrow \text{obecná kapalina}$$

Aby tento vztah byl lineární, materiálové koeficienty musí být zvoleny následovně

$$a_0 = \xi(\rho) \operatorname{tr} \mathbf{d}, \quad a_1 = \eta(\rho), \quad a_2 = 0$$



$$\mathbf{t} = \xi(\rho) (\operatorname{tr} \mathbf{d}) \mathbf{I} + 2\eta(\rho) \mathbf{d} = \xi(\rho) (\operatorname{div} \vec{v}) \mathbf{I} + \eta(\rho) [\operatorname{grad} \vec{v} + (\operatorname{grad} \vec{v})^T]$$

Příklad: Newtonovská viskózní kapalina

U řady kapalin je experimentálně pozorován lineární vztah mezi tenzorem napětí $\mathbf{t}$ a tenzorem $\mathbf{d}$. Tyto kapaliny se označují jako **newtonovské**.

$$\mathbf{t} = a_0 \mathbf{I} + 2a_1 \mathbf{d} + a_2 \mathbf{d}^2, \quad \text{kde } a_i = a_i(\rho, I_d, II_d, III_d) \quad \leftarrow \text{obecná kapalina}$$

Aby tento vztah byl lineární, materiálové koeficienty musí být zvoleny následovně

$$a_0 = \xi(\rho) \operatorname{tr} \mathbf{d}, \quad a_1 = \eta(\rho), \quad a_2 = 0$$



$$\mathbf{t} = \xi(\rho) (\operatorname{tr} \mathbf{d}) \mathbf{I} + 2\eta(\rho) \mathbf{d} = \xi(\rho) (\operatorname{div} \vec{v}) \mathbf{I} + \eta(\rho) [\operatorname{grad} \vec{v} + (\operatorname{grad} \vec{v})^T]$$

Předpokládejme, že kapalina je nestlačitelná ($\operatorname{div} \vec{v} = 0$) a uplatněme kinematickou podmínku ze strany 17:

$$\mathbf{t} = -p \mathbf{I} + 2\eta \mathbf{d} = -p \mathbf{I} + \eta [\operatorname{grad} \vec{v} + (\operatorname{grad} \vec{v})^T] \quad \leftarrow \text{newtonovská nestlačitelná kapalina}$$

Příklad: Newtonovská viskózní kapalina

U řady kapalin je experimentálně pozorován lineární vztah mezi tenzorem napětí $\mathbf{t}$ a tenzorem $\mathbf{d}$. Tyto kapaliny se označují jako **newtonovské**.

$$\mathbf{t} = a_0 \mathbf{I} + 2a_1 \mathbf{d} + a_2 \mathbf{d}^2, \quad \text{kde } a_i = a_i(\rho, I_d, II_d, III_d) \quad \leftarrow \text{obecná kapalina}$$

Aby tento vztah byl lineární, materiálové koeficienty musí být zvoleny následovně

$$a_0 = \xi(\rho) \operatorname{tr} \mathbf{d}, \quad a_1 = \eta(\rho), \quad a_2 = 0$$



$$\mathbf{t} = \xi(\rho) (\operatorname{tr} \mathbf{d}) \mathbf{I} + 2\eta(\rho) \mathbf{d} = \xi(\rho) (\operatorname{div} \vec{v}) \mathbf{I} + \eta(\rho) [\operatorname{grad} \vec{v} + (\operatorname{grad} \vec{v})^T]$$

Předpokládejme, že kapalina je nestlačitelná ($\operatorname{div} \vec{v} = 0$) a uplatněme kinematickou podmínku ze strany 17:

$$\mathbf{t} = -p \mathbf{I} + 2\eta \mathbf{d} = -p \mathbf{I} + \eta [\operatorname{grad} \vec{v} + (\operatorname{grad} \vec{v})^T] \quad \leftarrow \text{newtonovská nestlačitelná kapalina}$$

_____ Analogicky můžeme odvodit vztahy pro další izotropní materiály, např.:

Kelvin-Voigtovo viskoelastické těleso: $\mathbf{T}^{(2)} = \hat{\mathbf{T}}^{(2)}(\mathbf{C}, \dot{\mathbf{C}})$

Maxwellovo viskoelastické těleso: $\dot{\mathbf{T}}^{(2)} = \hat{\mathbf{T}}^{(2)}(\mathbf{T}^{(2)}, \mathbf{C})$

Příklad: Izotropní elastický materiál

Požadujeme, aby napěťový tenzor

(i) závisel pouze na okamžitém deformačním gradientu a (ii) nezávisel na teplotě a deformační minulosti.

$$\mathbf{t} = \hat{\mathbf{t}}(\mathbf{F})$$

1. Uplatníme požadavek materiálové objektivity

Závislost tenzoru napětí nemůže být libovolná, ale musí mít následující tvar, který zaručuje, že konstitutivní vztah je invariantní vůči změně souřadné soustavy:

$$\mathbf{t} = \mathbf{R} \cdot \hat{\mathbf{t}}(\mathbf{C}) \cdot \mathbf{R}^T, \quad \text{kde} \quad \mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}, \quad \mathbf{R} = \mathbf{F} \cdot (\sqrt{\mathbf{C}})^{-1} \quad (\text{viz polární rozklad, Geometrie str. 10-11})$$

2. Uplatníme požadavek izotropie

Aby materiál byl izotropní, musí být $\mathbf{t}$ izotropní funkcí $\mathbf{C}$. Podle věty o reprezentaci izotropní funkce pak musí platit

$$\mathbf{t} = \mathbf{R} \cdot (a_0 \mathbf{I} + a_1 \mathbf{C} + a_2 \mathbf{C}^2) \cdot \mathbf{R}^T, \quad \text{kde} \quad a_0, a_1, a_2 \text{ jsou funkce invariantů } I_C, II_C, III_C,$$

což lze dále upravit do tvaru (viz úplně dole):

$$\mathbf{t} = a_0 \mathbf{I} + a_1 \mathbf{b} + a_2 \mathbf{b}^2, \quad \text{kde} \quad \mathbf{b} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T \quad \text{a} \quad a_i = a_i(I_b, II_b, III_b)$$

Obecný reologický vztah
pro izotropní elastický materiál

Odvození v Lagrangeově tvaru

1. Použijeme tvar konstitutivní rovnice pro P-K2 splňující podmínku objektivity: $\mathbf{T}^{(2)} = \hat{\mathbf{T}}^{(2)}(\mathbf{C})$

2. Uplatníme požadavek izotropie

$$\mathbf{T}^{(2)} = a_0 \mathbf{I} + a_1 \mathbf{C} + a_2 \mathbf{C}^2 \quad \text{kde,} \quad a_i = a_i(I_C, II_C, III_C)$$

Obecný reologický vztah
pro izotropní elastický materiál
v Lagrangeově tvaru

$$\mathbf{b} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T = \mathbf{V}^2 = \mathbf{V}^T \cdot \mathbf{V} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{R}^T = \mathbf{R} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{R}^T, \quad \mathbf{b}^2 = \mathbf{R} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{R}^T = \mathbf{R} \cdot \mathbf{C}^2 \cdot \mathbf{R}^T$$

Tenzory $\mathbf{C}$ a $\mathbf{b}$ mají stejné invarianty, neboť tenzory $\mathbf{V}$ a $\mathbf{U}$ mají stejná vlastní čísla.

Příklad: Hookův zákon

Konstitutivní vztah pro izotropní elastický materiál je dán předpisem $\mathbf{t} = a_0 \mathbf{I} + a_1 \mathbf{b} + a_2 \mathbf{b}^2$.

$$\mathbf{b} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T$$

Předpokládejme, že deformace je malá, tj.

$$\mathbf{b} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T = (\mathbf{I} + \mathbf{H}^T) \cdot (\mathbf{I} + \mathbf{H}^T)^T \approx (\mathbf{I} + \mathbf{h}^T) \cdot (\mathbf{I} + \mathbf{h}^T)^T \approx \mathbf{I} + \mathbf{h} + \mathbf{h}^T = \mathbf{I} + 2\tilde{\mathbf{e}}$$

$$\tilde{\mathbf{e}} = \frac{1}{2} (\mathbf{h} + \mathbf{h}^T) = \frac{1}{2} \left[\text{grad } \vec{u} + (\text{grad } \vec{u})^T \right]$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{I} + 2\tilde{\mathbf{e}}$$

$$\mathbf{b}^2 = \mathbf{I} + 4\tilde{\mathbf{e}}$$

$$I_b = \text{tr } \mathbf{b} = \text{tr } (\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T) \approx \text{tr } (\mathbf{I} + 2\tilde{\mathbf{e}}) = 3 + 2 \text{tr } \tilde{\mathbf{e}}$$

$$II_b = 3 + 4 \text{tr } \tilde{\mathbf{e}}, \quad III_b = 1 + 2 \text{tr } \tilde{\mathbf{e}}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{t} &= a_0 \mathbf{I} + a_1 \mathbf{b} + a_2 \mathbf{b}^2 \approx (C_1 + C_2 \text{tr } \tilde{\mathbf{e}}) \mathbf{I} + (C_3 + C_4 \text{tr } \tilde{\mathbf{e}}) (\mathbf{I} + 2\tilde{\mathbf{e}}) + (C_5 + C_6 \text{tr } \tilde{\mathbf{e}}) (\mathbf{I} + 4\tilde{\mathbf{e}}) = \\ &= k_0 \mathbf{I} + k_1 (\text{tr } \tilde{\mathbf{e}}) \mathbf{I} + 2k_2 \tilde{\mathbf{e}}. \end{aligned}$$

$$\mathbf{t} = \lambda (\text{div } \vec{u}) \mathbf{I} + \mu \left[\text{grad } \vec{u} + (\text{grad } \vec{u})^T \right] \quad \leftarrow \text{ Hookův zákon}$$