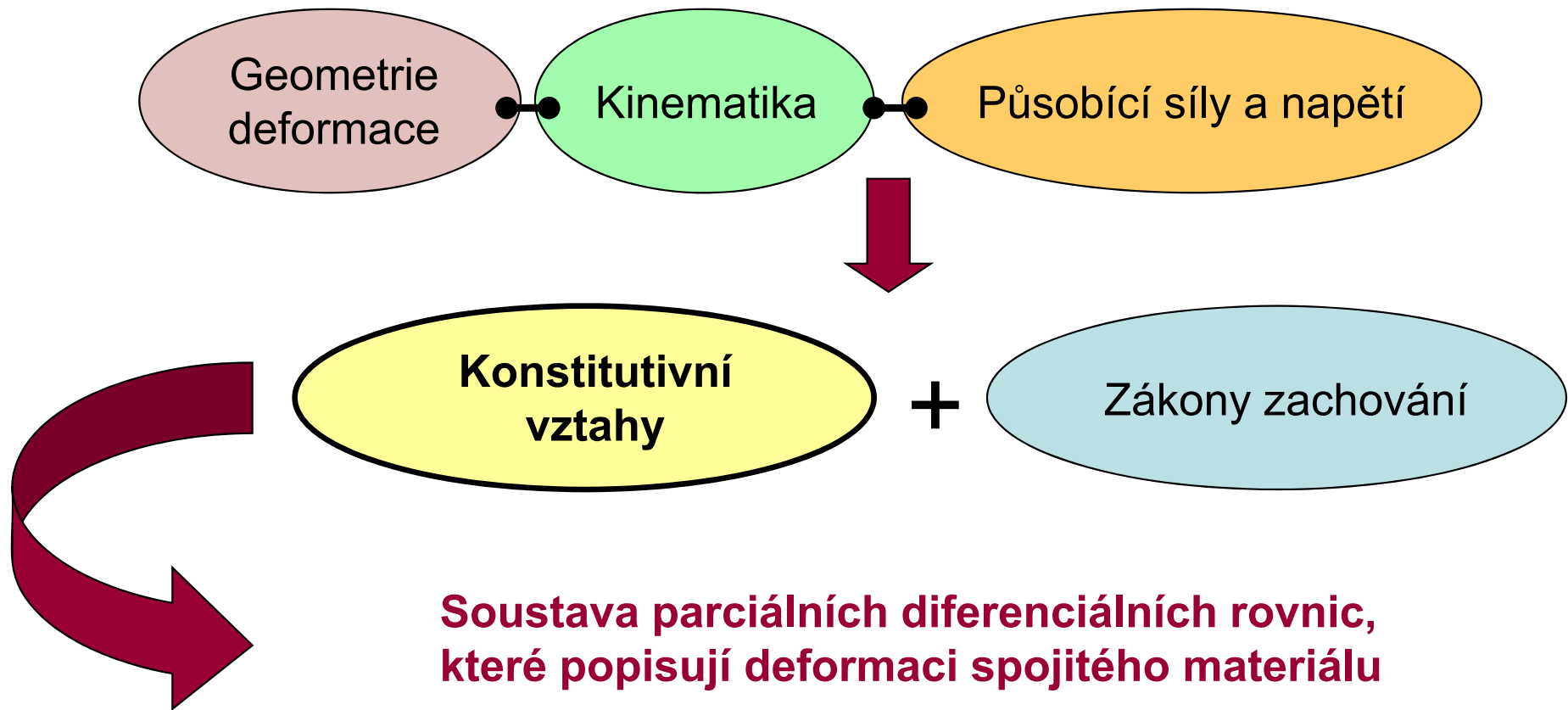


Mechanika kontinua – část 9
Konstitutivní vztahy I



- Požadavky, které musí splňovat konstitutivní vztahy:
deterministický princip – objektivita – termodynamická kompatibilita
- **Koncept objektivity**
- Kinematická podmínka
- Materiálové symetrie, homogenní a **izotropní materiály**
- Termodynamická kompatibilita – použití Clausius-Duhemovy nerovnosti

Konstitutivní vztahy – základní principy

Deterministický princip:

Aktuální stav termomechanických proměnných v čase t v materiálovém bodě $\vec{X}$ je obecně určen teplotní a deformační historií materiálových bodů tělesa v čase $\tau \leq t$. Chování materiálu nezávisí na bodech vně tělesa a dějích, které se uskuteční v budoucnosti.

Materiálová objektivita:

Tvar konstitutivních vztahů je invariantní vůči k pohybu referenční soustavy. Jinými slovy, materiálové vlastnosti nesmí záviset na stanovišti pozorovatele.

Termodynamická kompatibilita:

Materiálové vztahy musí být kompatibilní s druhou větou termodynamiky, tj. systém musí v každém okamžiku splňovat Clausius-Duhemovu nerovnost.

Objektivní veličiny jsou takové, které jsou invariantní vůči Euklidově transformaci (*rigid transformation*):

$$\text{Skalár: } \psi^* = \psi$$

$$\text{Vektor: } \vec{a}^* = \mathbf{O}(t) \cdot \vec{a}$$

$$\text{Tenzor: } \mathbf{A}^* = \mathbf{O}(t) \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{O}^T(t)$$

Objektivní materiálová derivace

Konstitutivní
vztahy 6

Uvažujme objektivní vektor a tenzor a spočtěme jejich materiálové derivace.

$$\text{Vektor: } \vec{a}^* = \mathbf{O} \cdot \vec{a} \rightarrow \dot{\vec{a}}^* = \mathbf{O} \cdot \dot{\vec{a}} + \dot{\mathbf{O}} \cdot \vec{a} = \mathbf{O} \cdot \dot{\vec{a}} + \dot{\mathbf{O}} \cdot \mathbf{O}^T \cdot \vec{a}^* \rightarrow \boxed{\dot{\vec{a}}^* = \mathbf{O} \cdot \dot{\vec{a}} + \boldsymbol{\Omega} \cdot \vec{a}^*}$$

$$\text{Tenzor: } \mathbf{A}^* = \mathbf{O} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{O}^T \rightarrow \boxed{\dot{\mathbf{A}}^* = \mathbf{O} \cdot \dot{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{O}^T + \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{A}^* - \mathbf{A}^* \cdot \boldsymbol{\Omega}}$$

Materiálové derivace objektivního vektoru a tenzoru nejsou objektivní, což může působit problémy při formulaci konstitutivních vztahů (viz příklad s Maxwellovou reologií). Britský matematický fyzik James G. Oldroyd (1921-1982) proto zavedl objektivní materiálovou derivaci, definovanou následovně:

$$\text{Vektor: } \overset{\nabla}{\vec{a}} = \dot{\vec{a}} - \mathbf{l} \cdot \vec{a}$$

$$\text{Tenzor: } \overset{\nabla}{\mathbf{A}} = \dot{\mathbf{A}} - \mathbf{l} \cdot \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{l}^T$$

← Oldroydova
neboli
horní kovektivní derivace
(*upper convected derivative*)

Důkaz objektivity pro vektor:

$$\overset{\nabla}{\vec{a}}^* = \dot{\vec{a}}^* - \mathbf{l}^* \cdot \vec{a}^* = \mathbf{O} \cdot \dot{\vec{a}} + \dot{\mathbf{O}} \cdot \vec{a} - (\mathbf{O} \cdot \mathbf{l} \cdot \mathbf{O}^T + \boldsymbol{\Omega}) \cdot \mathbf{O} \cdot \vec{a} = \mathbf{O} \cdot \dot{\vec{a}} + \cancel{\dot{\mathbf{O}} \cdot \vec{a}} - \mathbf{O} \cdot \mathbf{l} \cdot \mathbf{O}^T \cdot \mathbf{O} \cdot \vec{a} - \cancel{\boldsymbol{\Omega} \cdot \vec{a}} = \mathbf{O} \cdot (\dot{\vec{a}} - \mathbf{l} \cdot \vec{a}) = \mathbf{O} \cdot \overset{\nabla}{\vec{a}}$$

Materiálová derivace není definována jednoznačně. Lze ukázat, že pro libovolný objektivní tenzor je následující derivace objektivní, pokud je parametr α z intervalu $\langle -1, 1 \rangle$:

$$\left(\frac{\delta \mathbf{A}}{\delta t} \right)_\alpha = \dot{\mathbf{A}} - (\mathbf{w} \cdot \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{w}) + \alpha (\mathbf{d} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{d})$$

$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = -1 \\ \alpha = 0 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \leftarrow \text{Oldroydova horní} \\ \text{konvektivní derivace} \\ \leftarrow \text{Jaumannova} \\ \text{korotační derivace} \end{array} \right.$

Obecný tvar konstitutivních vztahů. „Jednoduché“ materiály.

Termomechanické konstitutivní rovnice charakterizují vztahy uvnitř množiny termomechanických parametrů. Tyto vztahy mohou být obecně vyjádřeny ve tvaru implicitního tenzorového funkcionálu zahrnujícího 15 neznámých polních veličin:

$$\mathcal{R}_{\vec{X}' \in B, \tau \leq t} \left[\rho(\vec{X}', \tau), \chi(\vec{X}', \tau), T(\vec{X}', \tau), \mathbf{t}(\vec{X}', \tau), \vec{q}(\vec{X}', \tau), \epsilon(\vec{X}', \tau), \vec{X} \right] = 0$$

Obecný tvar konstitutivních vztahů. „Jednoduché“ materiály.

Termomechanické konstitutivní rovnice charakterizují vztahy uvnitř množiny termomechanických parametrů. Tyto vztahy mohou být obecně vyjádřeny ve tvaru implicitního tenzorového funkcionálu zahrnujícího 15 neznámých polních veličin:

$$\mathcal{R}_{\vec{X}' \in B, \tau \leq t} \left[\rho(\vec{X}', \tau), \chi(\vec{X}', \tau), T(\vec{X}', \tau), \mathbf{t}(\vec{X}', \tau), \vec{q}(\vec{X}', \tau), \epsilon(\vec{X}', \tau), \vec{X} \right] = 0$$

Pro mnoho materiálů však můžeme psát konstitutivní vztahy explicitně.

$$\begin{aligned} \mathbf{t}(\vec{X}, t) &= \mathcal{F}_{\vec{X}' \in B, \tau \leq t} \left[\rho(\vec{X}', \tau), \chi(\vec{X}', \tau), T(\vec{X}', \tau), \vec{X} \right] \\ \vec{q}(\vec{X}, t) &= \mathcal{Q}_{\vec{X}' \in B, \tau \leq t} \left[\rho(\vec{X}', \tau), \chi(\vec{X}', \tau), T(\vec{X}', \tau), \vec{X} \right] \\ \epsilon(\vec{X}, t) &= \mathcal{E}_{\vec{X}' \in B, \tau \leq t} \left[\rho(\vec{X}', \tau), \chi(\vec{X}', \tau), T(\vec{X}', \tau), \vec{X} \right] \end{aligned}$$

Obecný tvar konstitutivních vztahů. „Jednoduché“ materiály.

Termomechanické konstitutivní rovnice charakterizují vztahy uvnitř množiny termomechanických parametrů. Tyto vztahy mohou být obecně vyjádřeny ve tvaru implicitního tenzorového funkcionálu zahrnujícího 15 neznámých polních veličin:

$$\mathcal{R}_{\vec{X}' \in B, \tau \leq t} \left[\rho(\vec{X}', \tau), \chi(\vec{X}', \tau), T(\vec{X}', \tau), \mathbf{t}(\vec{X}', \tau), \vec{q}(\vec{X}', \tau), \epsilon(\vec{X}', \tau), \vec{X} \right] = 0$$

Pro mnoho materiálů však můžeme psát konstitutivní vztahy explicitně.

$$\begin{aligned} \mathbf{t}(\vec{X}, t) &= \mathcal{F}_{\vec{X}' \in B, \tau \leq t} \left[\rho(\vec{X}', \tau), \chi(\vec{X}', \tau), T(\vec{X}', \tau), \vec{X} \right] \\ \vec{q}(\vec{X}, t) &= \mathcal{Q}_{\vec{X}' \in B, \tau \leq t} \left[\rho(\vec{X}', \tau), \chi(\vec{X}', \tau), T(\vec{X}', \tau), \vec{X} \right] \\ \epsilon(\vec{X}, t) &= \mathcal{E}_{\vec{X}' \in B, \tau \leq t} \left[\rho(\vec{X}', \tau), \chi(\vec{X}', \tau), T(\vec{X}', \tau), \vec{X} \right] \end{aligned}$$

Princip lokálního působení: Pohyb a teplota vzdálených materiálových bodů nemají vliv na lokální stav napětí, tepelného toku a vnitřní energie.

Termomechanické konstitutivní rovnice charakterizují vztahy uvnitř množiny termomechanických parametrů. Tyto vztahy mohou být obecně vyjádřeny ve tvaru implicitního tenzorového funkcionálu zahrnujícího 15 neznámých polních veličin:

$$\mathcal{R}_{\vec{X}' \in B, \tau \leq t} \left[\rho(\vec{X}', \tau), \chi(\vec{X}', \tau), T(\vec{X}', \tau), \mathbf{t}(\vec{X}', \tau), \vec{q}(\vec{X}', \tau), \epsilon(\vec{X}', \tau), \vec{X} \right] = 0$$

Pro mnoho materiálů však můžeme psát konstitutivní vztahy explicitně.

$$\begin{aligned} \mathbf{t}(\vec{X}, t) &= \mathcal{F}_{\vec{X}' \in B, \tau \leq t} \left[\rho(\vec{X}', \tau), \chi(\vec{X}', \tau), T(\vec{X}', \tau), \vec{X} \right] \\ \vec{q}(\vec{X}, t) &= \mathcal{Q}_{\vec{X}' \in B, \tau \leq t} \left[\rho(\vec{X}', \tau), \chi(\vec{X}', \tau), T(\vec{X}', \tau), \vec{X} \right] \\ \epsilon(\vec{X}, t) &= \mathcal{E}_{\vec{X}' \in B, \tau \leq t} \left[\rho(\vec{X}', \tau), \chi(\vec{X}', \tau), T(\vec{X}', \tau), \vec{X} \right] \end{aligned}$$

Princip lokálního působení: Pohyb a teplota vzdálených materiálových bodů nemají vliv na lokální stav napětí, tepelného toku a vnitřní energie.

$$\rho(\vec{X}', \tau) \approx \rho(\vec{X}, \tau) + \text{Grad } \rho(\vec{X}, \tau) \cdot d\vec{X}$$

$$\chi(\vec{X}', \tau) \approx \chi(\vec{X}, \tau) + \mathbf{F}(\vec{X}, \tau) \cdot d\vec{X}$$

$$T(\vec{X}', \tau) \approx T(\vec{X}, \tau) + \vec{G}(\vec{X}, \tau) \cdot d\vec{X}, \quad \text{kde} \quad \vec{G} := \text{Grad } T, \quad d\vec{X} = \vec{X}' - \vec{X}.$$

Obecný tvar konstitutivních vztahů. „Jednoduché“ materiály.

Konstitutivní
vztahy 7

Termomechanické konstitutivní rovnice charakterizují vztahy uvnitř množiny termomechanických parametrů. Tyto vztahy mohou být obecně vyjádřeny ve tvaru implicitního tenzorového funkcionálu zahrnujícího 15 neznámých polních veličin:

$$\mathcal{R}_{\vec{X}' \in B, \tau \leq t} \left[\rho(\vec{X}', \tau), \chi(\vec{X}', \tau), T(\vec{X}', \tau), \mathbf{t}(\vec{X}', \tau), \vec{q}(\vec{X}', \tau), \epsilon(\vec{X}', \tau), \vec{X} \right] = 0$$

Pro mnoho materiálů však můžeme psát konstitutivní vztahy explicitně.

$$\begin{aligned} \mathbf{t}(\vec{X}, t) &= \mathcal{F}_{\vec{X}' \in B, \tau \leq t} \left[\rho(\vec{X}', \tau), \chi(\vec{X}', \tau), T(\vec{X}', \tau), \vec{X} \right] \\ \vec{q}(\vec{X}, t) &= \mathcal{Q}_{\vec{X}' \in B, \tau \leq t} \left[\rho(\vec{X}', \tau), \chi(\vec{X}', \tau), T(\vec{X}', \tau), \vec{X} \right] \\ \epsilon(\vec{X}, t) &= \mathcal{E}_{\vec{X}' \in B, \tau \leq t} \left[\rho(\vec{X}', \tau), \chi(\vec{X}', \tau), T(\vec{X}', \tau), \vec{X} \right] \end{aligned}$$

Princip lokálního působení: Pohyb a teplota vzdálených materiálových bodů nemají vliv na lokální stav napětí, tepelného toku a vnitřní energie.

$$\rho(\vec{X}', \tau) \approx \rho(\vec{X}, \tau) + \text{Grad } \rho(\vec{X}, \tau) \cdot d\vec{X}$$

$$\chi(\vec{X}', \tau) \approx \chi(\vec{X}, \tau) + \mathbf{F}(\vec{X}, \tau) \cdot d\vec{X}$$

$$T(\vec{X}', \tau) \approx T(\vec{X}, \tau) + \vec{G}(\vec{X}, \tau) \cdot d\vec{X}, \quad \text{kde} \quad \vec{G} := \text{Grad } T, \quad d\vec{X} = \vec{X}' - \vec{X}.$$

Potom

$$\mathbf{t}(\vec{X}, t) = \mathcal{F}_{\tau \leq t} \left[\chi(\vec{X}, \tau), \mathbf{F}(\vec{X}, \tau), T(\vec{X}, \tau), \vec{G}(\vec{X}, \tau), \vec{X} \right]$$

a analogicky pro $\vec{q}$ a ϵ . Závislost na hustotě a gradientu hustoty je zahrnuta v deformačním gradientu $\mathbf{F}$.

Obecný tvar konstitutivních vztahů. „Jednoduché“ materiály.

Konstitutivní
vztahy 7

Termomechanické konstitutivní rovnice charakterizují vztahy uvnitř množiny termomechanických parametrů. Tyto vztahy mohou být obecně vyjádřeny ve tvaru implicitního tenzorového funkcionálu zahrnujícího 15 neznámých polních veličin:

$$\mathcal{R}_{\vec{X}' \in B, \tau \leq t} \left[\rho(\vec{X}', \tau), \chi(\vec{X}', \tau), T(\vec{X}', \tau), \mathbf{t}(\vec{X}', \tau), \vec{q}(\vec{X}', \tau), \epsilon(\vec{X}', \tau), \vec{X} \right] = 0$$

Pro mnoho materiálů však můžeme psát konstitutivní vztahy explicitně.

$$\begin{aligned} \mathbf{t}(\vec{X}, t) &= \mathcal{F}_{\vec{X}' \in B, \tau \leq t} \left[\rho(\vec{X}', \tau), \chi(\vec{X}', \tau), T(\vec{X}', \tau), \vec{X} \right] \\ \vec{q}(\vec{X}, t) &= \mathcal{Q}_{\vec{X}' \in B, \tau \leq t} \left[\rho(\vec{X}', \tau), \chi(\vec{X}', \tau), T(\vec{X}', \tau), \vec{X} \right] \\ \epsilon(\vec{X}, t) &= \mathcal{E}_{\vec{X}' \in B, \tau \leq t} \left[\rho(\vec{X}', \tau), \chi(\vec{X}', \tau), T(\vec{X}', \tau), \vec{X} \right] \end{aligned}$$

Princip lokálního působení: Pohyb a teplota vzdálených materiálových bodů nemají vliv na lokální stav napětí, tepelného toku a vnitřní energie.

$$\rho(\vec{X}', \tau) \approx \rho(\vec{X}, \tau) + \text{Grad } \rho(\vec{X}, \tau) \cdot d\vec{X}$$

$$\chi(\vec{X}', \tau) \approx \chi(\vec{X}, \tau) + \mathbf{F}(\vec{X}, \tau) \cdot d\vec{X}$$

$$T(\vec{X}', \tau) \approx T(\vec{X}, \tau) + \vec{G}(\vec{X}, \tau) \cdot d\vec{X}, \quad \text{kde} \quad \vec{G} := \text{Grad } T, \quad d\vec{X} = \vec{X}' - \vec{X}.$$

Potom

$$\mathbf{t}(\vec{X}, t) = \mathcal{F}_{\tau \leq t} \left[\chi(\vec{X}, \tau), \mathbf{F}(\vec{X}, \tau), T(\vec{X}, \tau), \vec{G}(\vec{X}, \tau), \vec{X} \right]$$

← jednoduché materiály

a analogicky pro $\vec{q}$ a ϵ . Závislost na hustotě a gradientu hustoty je zahrnuta v deformačním gradientu $\mathbf{F}$.

Princip materiálové objektivity: Tvar konstitutivních vztahů je invariantní vůči pohybu pozorovatele.

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{t}(\vec{X}, t) &= \mathcal{F}_{\tau \leq t} \left[\chi(\vec{X}, \tau), \mathbf{F}(\vec{X}, \tau), T(\vec{X}, \tau), \vec{G}(\vec{X}, \tau), \vec{X} \right] \\ \mathbf{t}^*(\vec{X}, t) &= \mathcal{F}^*_{\tau \leq t} \left[\chi^*(\vec{X}, \tau), \mathbf{F}^*(\vec{X}, \tau), T^*(\vec{X}, \tau), \vec{G}^*(\vec{X}, \tau), \vec{X} \right] \end{aligned} \right\} \mathcal{F}(\bullet) = \mathcal{F}^*(\bullet)$$

Princip materiálové objektivity: Tvar konstitutivních vztahů je invariantní vůči pohybu pozorovatele.

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{t}(\vec{X}, t) &= \mathcal{F} \left[\chi(\vec{X}, \tau), \mathbf{F}(\vec{X}, \tau), T(\vec{X}, \tau), \vec{G}(\vec{X}, \tau), \vec{X} \right] \\ \mathbf{t}^*(\vec{X}, t) &= \mathcal{F}^* \left[\chi^*(\vec{X}, \tau), \mathbf{F}^*(\vec{X}, \tau), T^*(\vec{X}, \tau), \vec{G}^*(\vec{X}, \tau), \vec{X} \right] \end{aligned} \right\} \mathcal{F}(\bullet) = \mathcal{F}^*(\bullet)$$

$$\mathbf{t} = \lambda(\operatorname{div} \vec{u})\mathbf{I} + \mu \left(\operatorname{grad} \vec{u} + (\operatorname{grad} \vec{u})^T \right)$$

$$\mathbf{t}^* = \lambda^*(\operatorname{div} \vec{u}^*)\mathbf{I} + \mu^* \left(\operatorname{grad} \vec{u}^* + (\operatorname{grad} \vec{u}^*)^T \right)$$

Princip materiálové objektivity: Tvar konstitutivních vztahů je invariantní vůči pohybu pozorovatele.

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{t}(\vec{X}, t) &= \mathcal{F}_{\tau \leq t} \left[\chi(\vec{X}, \tau), \mathbf{F}(\vec{X}, \tau), T(\vec{X}, \tau), \vec{G}(\vec{X}, \tau), \vec{X} \right] \\ \mathbf{t}^*(\vec{X}, t) &= \mathcal{F}^*_{\tau \leq t} \left[\chi^*(\vec{X}, \tau), \mathbf{F}^*(\vec{X}, \tau), T^*(\vec{X}, \tau), \vec{G}^*(\vec{X}, \tau), \vec{X} \right] \end{aligned} \right\} \boxed{\mathcal{F}(\bullet) = \mathcal{F}^*(\bullet)}$$

Z objektivity napěťového tenzoru plyne

$$\mathbf{t}^*(\vec{X}, t) = \mathbf{O}(t) \cdot \mathbf{t}(\vec{X}, t) \cdot \mathbf{O}^T(t) = \mathbf{O}(t) \cdot \mathcal{F}_{\tau \leq t} \left[\chi(\vec{X}, \tau), \mathbf{F}(\vec{X}, \tau), T(\vec{X}, \tau), \vec{G}(\vec{X}, \tau), \vec{X} \right] \cdot \mathbf{O}^T(t) =$$

Princip materiálové objektivity: Tvar konstitutivních vztahů je invariantní vůči pohybu pozorovatele.

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{t}(\vec{X}, t) &= \mathcal{F}_{\tau \leq t} \left[\chi(\vec{X}, \tau), \mathbf{F}(\vec{X}, \tau), T(\vec{X}, \tau), \vec{G}(\vec{X}, \tau), \vec{X} \right] \\ \mathbf{t}^*(\vec{X}, t) &= \mathcal{F}^*_{\tau \leq t} \left[\chi^*(\vec{X}, \tau), \mathbf{F}^*(\vec{X}, \tau), T^*(\vec{X}, \tau), \vec{G}^*(\vec{X}, \tau), \vec{X} \right] \end{aligned} \right\} \boxed{\mathcal{F}(\bullet) = \mathcal{F}^*(\bullet)}$$

Z objektivity napěťového tenzoru plyne

$$\begin{aligned} \mathbf{t}^*(\vec{X}, t) &= \mathbf{O}(t) \cdot \mathbf{t}(\vec{X}, t) \cdot \mathbf{O}^T(t) = \mathbf{O}(t) \cdot \mathcal{F}_{\tau \leq t} \left[\chi(\vec{X}, \tau), \mathbf{F}(\vec{X}, \tau), T(\vec{X}, \tau), \vec{G}(\vec{X}, \tau), \vec{X} \right] \cdot \mathbf{O}^T(t) = \\ &= \mathcal{F}_{\tau \leq t} \left[\chi^*(\vec{X}, \tau), \mathbf{F}^*(\vec{X}, \tau), T^*(\vec{X}, \tau), \vec{G}^*(\vec{X}, \tau), \vec{X} \right] = \end{aligned}$$

Princip materiálové objektivity: Tvar konstitutivních vztahů je invariantní vůči pohybu pozorovatele.

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{t}(\vec{X}, t) &= \mathcal{F}_{\tau \leq t} \left[\chi(\vec{X}, \tau), \mathbf{F}(\vec{X}, \tau), T(\vec{X}, \tau), \vec{G}(\vec{X}, \tau), \vec{X} \right] \\ \mathbf{t}^*(\vec{X}, t) &= \mathcal{F}^*_{\tau \leq t} \left[\chi^*(\vec{X}, \tau), \mathbf{F}^*(\vec{X}, \tau), T^*(\vec{X}, \tau), \vec{G}^*(\vec{X}, \tau), \vec{X} \right] \end{aligned} \right\} \boxed{\mathcal{F}(\bullet) = \mathcal{F}^*(\bullet)}$$

Z objektivity napěťového tenzoru plyne

$$\begin{aligned} \mathbf{t}^*(\vec{X}, t) &= \mathbf{O}(t) \cdot \mathbf{t}(\vec{X}, t) \cdot \mathbf{O}^T(t) = \mathbf{O}(t) \cdot \mathcal{F}_{\tau \leq t} \left[\chi(\vec{X}, \tau), \mathbf{F}(\vec{X}, \tau), T(\vec{X}, \tau), \vec{G}(\vec{X}, \tau), \vec{X} \right] \cdot \mathbf{O}^T(t) = \\ &= \mathcal{F}_{\tau \leq t} \left[\chi^*(\vec{X}, \tau), \mathbf{F}^*(\vec{X}, \tau), T^*(\vec{X}, \tau), \vec{G}^*(\vec{X}, \tau), \vec{X} \right] = \\ &= \mathcal{F}_{\tau \leq t} \left[\mathbf{O}(\tau) \cdot \chi(\vec{X}, \tau) + \vec{b}^*(\tau), \mathbf{O}(\tau) \cdot \mathbf{F}(\vec{X}, \tau), T(\vec{X}, \tau), \vec{G}(\vec{X}, \tau), \vec{X} \right] \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} \mathbf{t}^*(\vec{X}, t) &= \mathbf{O}(t) \cdot \mathbf{t}(\vec{X}, t) \cdot \mathbf{O}^T(t) = \mathbf{O}(t) \cdot \mathcal{F}_{\tau \leq t} \left[\chi(\vec{X}, \tau), \mathbf{F}(\vec{X}, \tau), T(\vec{X}, \tau), \vec{G}(\vec{X}, \tau), \vec{X} \right] \cdot \mathbf{O}^T(t) = } \right\} \begin{array}{l} \text{Zde již vynecháváme} \\ \text{hvězdičku u funkcionálu } \mathcal{F}^*. \end{array}$$

Princip materiálové objektivity: Tvar konstitutivních vztahů je invariantní vůči pohybu pozorovatele.

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{t}(\vec{X}, t) &= \mathcal{F}_{\tau \leq t} \left[\chi(\vec{X}, \tau), \mathbf{F}(\vec{X}, \tau), T(\vec{X}, \tau), \vec{G}(\vec{X}, \tau), \vec{X} \right] \\ \mathbf{t}^*(\vec{X}, t) &= \mathcal{F}^*_{\tau \leq t} \left[\chi^*(\vec{X}, \tau), \mathbf{F}^*(\vec{X}, \tau), T^*(\vec{X}, \tau), \vec{G}^*(\vec{X}, \tau), \vec{X} \right] \end{aligned} \right\} \mathcal{F}(\bullet) = \mathcal{F}^*(\bullet)$$

Z objektivity napětového tenzoru plyne

$$\begin{aligned} \mathbf{t}^*(\vec{X}, t) &= \mathbf{O}(t) \cdot \mathbf{t}(\vec{X}, t) \cdot \mathbf{O}^T(t) = \mathbf{O}(t) \cdot \mathcal{F}_{\tau \leq t} \left[\chi(\vec{X}, \tau), \mathbf{F}(\vec{X}, \tau), T(\vec{X}, \tau), \vec{G}(\vec{X}, \tau), \vec{X} \right] \cdot \mathbf{O}^T(t) = \\ &= \mathcal{F}_{\tau \leq t} \left[\chi^*(\vec{X}, \tau), \mathbf{F}^*(\vec{X}, \tau), T^*(\vec{X}, \tau), \vec{G}^*(\vec{X}, \tau), \vec{X} \right] = \\ &= \mathcal{F}_{\tau \leq t} \left[\mathbf{O}(\tau) \cdot \chi(\vec{X}, \tau) + \vec{b}^*(\tau), \mathbf{O}(\tau) \cdot \mathbf{F}(\vec{X}, \tau), T(\vec{X}, \tau), \vec{G}(\vec{X}, \tau), \vec{X} \right] \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} \mathbf{t}^*(\vec{X}, t) &= \mathbf{O}(t) \cdot \mathbf{t}(\vec{X}, t) \cdot \mathbf{O}^T(t) = \mathbf{O}(t) \cdot \mathcal{F}_{\tau \leq t} \left[\chi(\vec{X}, \tau), \mathbf{F}(\vec{X}, \tau), T(\vec{X}, \tau), \vec{G}(\vec{X}, \tau), \vec{X} \right] \cdot \mathbf{O}^T(t) = } \right\} \begin{array}{l} \text{Zde již vynecháváme} \\ \text{hvězdičku u funkcionálu } \mathcal{F}^*. \end{array}$$

Tento vztah musí platit pro libovolné $\mathbf{O}(\tau)$ a $\vec{b}^*(\tau)$, tedy i pro $\mathbf{O}(\tau) = \mathbf{I}$, $\vec{b}^*(\tau) = -\vec{\chi}(\vec{X}, \tau)$.

Princip materiálové objektivity: Tvar konstitutivních vztahů je invariantní vůči pohybu pozorovatele.

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{t}(\vec{X}, t) &= \mathcal{F}_{\tau \leq t} \left[\chi(\vec{X}, \tau), \mathbf{F}(\vec{X}, \tau), T(\vec{X}, \tau), \vec{G}(\vec{X}, \tau), \vec{X} \right] \\ \mathbf{t}^*(\vec{X}, t) &= \mathcal{F}^*_{\tau \leq t} \left[\chi^*(\vec{X}, \tau), \mathbf{F}^*(\vec{X}, \tau), T^*(\vec{X}, \tau), \vec{G}^*(\vec{X}, \tau), \vec{X} \right] \end{aligned} \right\} \mathcal{F}(\bullet) = \mathcal{F}^*(\bullet)$$

Z objektivity napětového tenzoru plyne

$$\begin{aligned} \mathbf{t}^*(\vec{X}, t) &= \mathbf{O}(t) \cdot \mathbf{t}(\vec{X}, t) \cdot \mathbf{O}^T(t) = \mathbf{O}(t) \cdot \mathcal{F}_{\tau \leq t} \left[\chi(\vec{X}, \tau), \mathbf{F}(\vec{X}, \tau), T(\vec{X}, \tau), \vec{G}(\vec{X}, \tau), \vec{X} \right] \cdot \mathbf{O}^T(t) = \\ &= \mathcal{F}_{\tau \leq t} \left[\chi^*(\vec{X}, \tau), \mathbf{F}^*(\vec{X}, \tau), T^*(\vec{X}, \tau), \vec{G}^*(\vec{X}, \tau), \vec{X} \right] = \\ &= \mathcal{F}_{\tau \leq t} \left[\mathbf{O}(\tau) \cdot \chi(\vec{X}, \tau) + \vec{b}^*(\tau), \mathbf{O}(\tau) \cdot \mathbf{F}(\vec{X}, \tau), T(\vec{X}, \tau), \vec{G}(\vec{X}, \tau), \vec{X} \right] \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} \mathbf{t}^*(\vec{X}, t) &= \mathbf{O}(t) \cdot \mathbf{t}(\vec{X}, t) \cdot \mathbf{O}^T(t) = \mathbf{O}(t) \cdot \mathcal{F}_{\tau \leq t} \left[\chi(\vec{X}, \tau), \mathbf{F}(\vec{X}, \tau), T(\vec{X}, \tau), \vec{G}(\vec{X}, \tau), \vec{X} \right] \cdot \mathbf{O}^T(t) = } \right\} \begin{array}{l} \text{Zde již vynecháváme} \\ \text{hvězdičku u funkcionálu } \mathcal{F}^*. \end{array}$$

Tento vztah musí platit pro libovolné $\mathbf{O}(\tau)$ a $\vec{b}^*(\tau)$, tedy i pro $\mathbf{O}(\tau) = \mathbf{I}$, $\vec{b}^*(\tau) = -\vec{\chi}'(\vec{X}, \tau)$.

Dostáváme pak

$$\mathcal{F}_{\tau \leq t} \left[\chi(\vec{X}, \tau), \mathbf{F}(\vec{X}, \tau), T(\vec{X}, \tau), \vec{G}(\vec{X}, \tau), \vec{X} \right] = \mathcal{F}_{\tau \leq t} \left[\vec{0}, \mathbf{F}(\vec{X}, \tau), T(\vec{X}, \tau), \vec{G}(\vec{X}, \tau), \vec{X} \right]$$

Princip materiálové objektivity: Tvar konstitutivních vztahů je invariantní vůči pohybu pozorovatele.

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{t}(\vec{X}, t) &= \mathcal{F}_{\tau \leq t} \left[\chi(\vec{X}, \tau), \mathbf{F}(\vec{X}, \tau), T(\vec{X}, \tau), \vec{G}(\vec{X}, \tau), \vec{X} \right] \\ \mathbf{t}^*(\vec{X}, t) &= \mathcal{F}^*_{\tau \leq t} \left[\chi^*(\vec{X}, \tau), \mathbf{F}^*(\vec{X}, \tau), T^*(\vec{X}, \tau), \vec{G}^*(\vec{X}, \tau), \vec{X} \right] \end{aligned} \right\} \mathcal{F}(\bullet) = \mathcal{F}^*(\bullet)$$

Z objektivity napěťového tenzoru plyne

$$\begin{aligned} \mathbf{t}^*(\vec{X}, t) &= \mathbf{O}(t) \cdot \mathbf{t}(\vec{X}, t) \cdot \mathbf{O}^T(t) = \mathbf{O}(t) \cdot \mathcal{F}_{\tau \leq t} \left[\chi(\vec{X}, \tau), \mathbf{F}(\vec{X}, \tau), T(\vec{X}, \tau), \vec{G}(\vec{X}, \tau), \vec{X} \right] \cdot \mathbf{O}^T(t) = \\ &= \mathcal{F}_{\tau \leq t} \left[\chi^*(\vec{X}, \tau), \mathbf{F}^*(\vec{X}, \tau), T^*(\vec{X}, \tau), \vec{G}^*(\vec{X}, \tau), \vec{X} \right] = \\ &= \mathcal{F}_{\tau \leq t} \left[\mathbf{O}(\tau) \cdot \chi(\vec{X}, \tau) + \vec{b}^*(\tau), \mathbf{O}(\tau) \cdot \mathbf{F}(\vec{X}, \tau), T(\vec{X}, \tau), \vec{G}(\vec{X}, \tau), \vec{X} \right] \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} \mathbf{t}^*(\vec{X}, t) &= \mathbf{O}(t) \cdot \mathbf{t}(\vec{X}, t) \cdot \mathbf{O}^T(t) = \mathbf{O}(t) \cdot \mathcal{F}_{\tau \leq t} \left[\chi(\vec{X}, \tau), \mathbf{F}(\vec{X}, \tau), T(\vec{X}, \tau), \vec{G}(\vec{X}, \tau), \vec{X} \right] \cdot \mathbf{O}^T(t) = \mathcal{F}_{\tau \leq t} \left[\chi^*(\vec{X}, \tau), \mathbf{F}^*(\vec{X}, \tau), T^*(\vec{X}, \tau), \vec{G}^*(\vec{X}, \tau), \vec{X} \right] = \mathcal{F}_{\tau \leq t} \left[\mathbf{O}(\tau) \cdot \chi(\vec{X}, \tau) + \vec{b}^*(\tau), \mathbf{O}(\tau) \cdot \mathbf{F}(\vec{X}, \tau), T(\vec{X}, \tau), \vec{G}(\vec{X}, \tau), \vec{X} \right]} \right\} \begin{array}{l} \text{Zde již vynecháváme} \\ \text{hvězdičku u funkcionálu } \mathcal{F}^*. \end{array}$$

Tento vztah musí platit pro libovolné $\mathbf{O}(\tau)$ a $\vec{b}^*(\tau)$, tedy i pro $\mathbf{O}(\tau) = \mathbf{I}$, $\vec{b}^*(\tau) = -\vec{\chi}(\vec{X}, \tau)$.

Dostáváme pak

$$\mathcal{F}_{\tau \leq t} \left[\chi(\vec{X}, \tau), \mathbf{F}(\vec{X}, \tau), T(\vec{X}, \tau), \vec{G}(\vec{X}, \tau), \vec{X} \right] = \mathcal{F}_{\tau \leq t} \left[\vec{0}, \mathbf{F}(\vec{X}, \tau), T(\vec{X}, \tau), \vec{G}(\vec{X}, \tau), \vec{X} \right]$$

a tedy

$$\mathbf{t}(\vec{X}, t) = \mathcal{F}_{\tau \leq t} \left[\mathbf{F}(\vec{X}, \tau), T(\vec{X}, \tau), \vec{G}(\vec{X}, \tau), \vec{X} \right]$$

Materiálová objektivita - pokračování

Z předchozí strany máme:

$$\mathbf{t}(\vec{X}, t) = \mathcal{F}_{\tau \leq t} \left[\mathbf{F}(\vec{X}, \tau), T(\vec{X}, \tau), \vec{G}(\vec{X}, \tau), \vec{X} \right]$$

Materiálová objektivita - pokračování

Z předchozí strany máme:

$$\mathbf{t}(\vec{X}, t) = \mathcal{F}_{\tau \leq t} \left[\mathbf{F}(\vec{X}, \tau), T(\vec{X}, \tau), \vec{G}(\vec{X}, \tau), \vec{X} \right]$$

Uvažujme nyní další speciální volbu $\mathbf{O}(\tau)$, konkrétně $\mathbf{O}(\tau) = \mathbf{R}^T(\vec{X}, \tau)$, viz polární rozklad $\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U}$:

Materiálová objektivita - pokračování

Z předchozí strany máme:

$$\mathbf{t}(\vec{X}, t) = \mathcal{F}_{\tau \leq t} \left[\mathbf{F}(\vec{X}, \tau), T(\vec{X}, \tau), \vec{G}(\vec{X}, \tau), \vec{X} \right]$$

Uvažujme nyní další speciální volbu $\mathbf{O}(\tau)$, konkrétně $\mathbf{O}(\tau) = \mathbf{R}^T(\vec{X}, \tau)$, viz polární rozklad $\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U}$:

$$\mathbf{R}^T(\vec{X}, t) \cdot \mathcal{F}_{\tau \leq t} \left[\mathbf{F}(\vec{X}, \tau), T(\vec{X}, \tau), \vec{G}(\vec{X}, \tau), \vec{X} \right] \cdot \mathbf{R}(\vec{X}, t) = \mathcal{F}_{\tau \leq t} \left[\mathbf{R}^T(\vec{X}, \tau) \cdot \mathbf{F}(\vec{X}, \tau), T(\vec{X}, \tau), \vec{G}(\vec{X}, \tau), \vec{X} \right]$$

Materiálová objektivita - pokračování

Z předchozí strany máme:

$$\mathbf{t}(\vec{X}, t) = \mathcal{F}_{\tau \leq t} \left[\mathbf{F}(\vec{X}, \tau), T(\vec{X}, \tau), \vec{G}(\vec{X}, \tau), \vec{X} \right]$$

Uvažujme nyní další speciální volbu $\mathbf{O}(\tau)$, konkrétně $\mathbf{O}(\tau) = \mathbf{R}^T(\vec{X}, \tau)$, viz polární rozklad $\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U}$:

$$\mathbf{R}^T(\vec{X}, t) \cdot \mathcal{F}_{\tau \leq t} \left[\mathbf{F}(\vec{X}, \tau), T(\vec{X}, \tau), \vec{G}(\vec{X}, \tau), \vec{X} \right] \cdot \mathbf{R}(\vec{X}, t) = \mathcal{F}_{\tau \leq t} \left[\mathbf{R}^T(\vec{X}, \tau) \cdot \mathbf{F}(\vec{X}, \tau), T(\vec{X}, \tau), \vec{G}(\vec{X}, \tau), \vec{X} \right]$$



$$\mathbf{t}(\vec{X}, t) = \mathcal{F}_{\tau \leq t} \left[\mathbf{F}(\vec{X}, \tau), T(\vec{X}, \tau), \vec{G}(\vec{X}, \tau), \vec{X} \right] = \mathbf{R}(\vec{X}, t) \cdot \mathcal{F}_{\tau \leq t} \left[\mathbf{U}(\vec{X}, \tau), T(\vec{X}, \tau), \vec{G}(\vec{X}, \tau), \vec{X} \right] \cdot \mathbf{R}^T(\vec{X}, t)$$

$$\mathbf{t} = \mathcal{F}_{\tau \leq t} \left[\mathbf{F}, T, \vec{G}, \vec{X} \right]$$

$$\mathbf{t} = \mathcal{F}_{\tau \leq t} \left[\mathbf{F}, T, \vec{G}, \vec{X} \right]$$

$$\mathbf{t}^* = \mathcal{F}_{\tau \leq t} \left[\mathbf{F}^*, T^*, \vec{G}^*, \vec{X} \right] = \mathcal{F}_{\tau \leq t} \left[\mathbf{O} \cdot \mathbf{F}, T, \vec{G}, \vec{X} \right]$$

$$\mathbf{t} = \mathcal{F}_{\tau \leq t} \left[\mathbf{F}, T, \vec{G}, \vec{X} \right]$$

$$\mathbf{t}^* = \mathcal{F}_{\tau \leq t} \left[\mathbf{F}^*, T^*, \vec{G}^*, \vec{X} \right] = \mathcal{F}_{\tau \leq t} \left[\mathbf{O} \cdot \mathbf{F}, T, \vec{G}, \vec{X} \right]$$

$$\mathbf{t}^* = \mathbf{O} \cdot \mathbf{t} \cdot \mathbf{O}^T = \mathbf{O} \cdot \mathcal{F}_{\tau \leq t} \left[\mathbf{F}, T, \vec{G}, \vec{X} \right] \cdot \mathbf{O}^T = \mathcal{F}_{\tau \leq t} \left[\mathbf{O} \cdot \mathbf{F}, T, \vec{G}, \vec{X} \right]$$

$$\mathbf{t} = \mathcal{F}_{\tau \leq t} [\mathbf{F}, T, \vec{G}, \vec{X}]$$

$$\mathbf{t}^* = \mathcal{F}_{\tau \leq t} [\mathbf{F}^*, T^*, \vec{G}^*, \vec{X}] = \mathcal{F}_{\tau \leq t} [\mathbf{O} \cdot \mathbf{F}, T, \vec{G}, \vec{X}]$$

$$\mathbf{t}^* = \mathbf{O} \cdot \mathbf{t} \cdot \mathbf{O}^T = \mathbf{O} \cdot \mathcal{F}_{\tau \leq t} [\mathbf{F}, T, \vec{G}, \vec{X}] \cdot \mathbf{O}^T = \mathcal{F}_{\tau \leq t} [\mathbf{O} \cdot \mathbf{F}, T, \vec{G}, \vec{X}]$$

$$\mathbf{t} = \mathcal{F}_{\tau \leq t} [\mathbf{F}, T, \vec{G}, \vec{X}]$$

$$\mathbf{t}^* = \mathcal{F}_{\tau \leq t} [\mathbf{F}^*, T^*, \vec{G}^*, \vec{X}] = \mathcal{F}_{\tau \leq t} [\mathbf{O} \cdot \mathbf{F}, T, \vec{G}, \vec{X}]$$

$$\mathbf{t}^* = \underline{\mathbf{O} \cdot \mathbf{t} \cdot \mathbf{O}^T} = \mathbf{O} \cdot \mathcal{F}_{\tau \leq t} [\mathbf{F}, T, \vec{G}, \vec{X}] \cdot \mathbf{O}^T = \underline{\mathcal{F}_{\tau \leq t} [\mathbf{O} \cdot \mathbf{F}, T, \vec{G}, \vec{X}]}$$

$$\mathbf{t} = \mathcal{F}_{\tau \leq t} [\mathbf{F}, T, \vec{G}, \vec{X}]$$

$$\mathbf{t}^* = \mathcal{F}_{\tau \leq t} [\mathbf{F}^*, T^*, \vec{G}^*, \vec{X}] = \mathcal{F}_{\tau \leq t} [\mathbf{O} \cdot \mathbf{F}, T, \vec{G}, \vec{X}]$$

$$\mathbf{t}^* = \underline{\mathbf{O} \cdot \mathbf{t} \cdot \mathbf{O}^T} = \mathbf{O} \cdot \mathcal{F}_{\tau \leq t} [\mathbf{F}, T, \vec{G}, \vec{X}] \cdot \mathbf{O}^T = \mathcal{F}_{\tau \leq t} [\mathbf{O} \cdot \mathbf{F}, T, \vec{G}, \vec{X}]$$

$$\mathbf{O} \cdot \mathbf{t} \cdot \mathbf{O}^T = \mathcal{F}_{\tau \leq t} [\mathbf{O} \cdot \mathbf{F}, T, \vec{G}, \vec{X}]$$

$$\mathbf{t} = \mathcal{F}_{\tau \leq t} [\mathbf{F}, T, \vec{G}, \vec{X}]$$

$$\mathbf{t}^* = \mathcal{F}_{\tau \leq t} [\mathbf{F}^*, T^*, \vec{G}^*, \vec{X}] = \mathcal{F}_{\tau \leq t} [\mathbf{O} \cdot \mathbf{F}, T, \vec{G}, \vec{X}]$$

$$\mathbf{t}^* = \underline{\mathbf{O} \cdot \mathbf{t} \cdot \mathbf{O}^T} = \mathbf{O} \cdot \mathcal{F}_{\tau \leq t} [\mathbf{F}, T, \vec{G}, \vec{X}] \cdot \mathbf{O}^T = \mathcal{F}_{\tau \leq t} [\underline{\mathbf{O} \cdot \mathbf{F}, T, \vec{G}, \vec{X}}]$$

$$\mathbf{O} \cdot \mathbf{t} \cdot \mathbf{O}^T = \mathcal{F}_{\tau \leq t} [\mathbf{O} \cdot \mathbf{F}, T, \vec{G}, \vec{X}]$$

$$\mathbf{t} = \mathbf{O}^T \cdot \mathcal{F}_{\tau \leq t} [\mathbf{O} \cdot \mathbf{F}, T, \vec{G}, \vec{X}] \cdot \mathbf{O}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{t} &= \mathcal{F}_{\tau \leq t} [\mathbf{F}, T, \vec{G}, \vec{X}] \\
 \mathbf{t}^* &= \mathcal{F}_{\tau \leq t} [\mathbf{F}^*, T^*, \vec{G}^*, \vec{X}] = \mathcal{F}_{\tau \leq t} [\mathbf{O} \cdot \mathbf{F}, T, \vec{G}, \vec{X}] \\
 \mathbf{t}^* &= \underline{\mathbf{O} \cdot \mathbf{t} \cdot \mathbf{O}^T} = \mathbf{O} \cdot \mathcal{F}_{\tau \leq t} [\mathbf{F}, T, \vec{G}, \vec{X}] \cdot \mathbf{O}^T = \underline{\mathcal{F}_{\tau \leq t} [\mathbf{O} \cdot \mathbf{F}, T, \vec{G}, \vec{X}]}
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{O} \cdot \mathbf{t} \cdot \mathbf{O}^T = \mathcal{F}_{\tau \leq t} [\mathbf{O} \cdot \mathbf{F}, T, \vec{G}, \vec{X}]$$

$$\mathbf{t} = \mathbf{O}^T \cdot \mathcal{F}_{\tau \leq t} [\mathbf{O} \cdot \mathbf{F}, T, \vec{G}, \vec{X}] \cdot \mathbf{O}$$

$$\mathbf{O} = \mathbf{R}^T \quad \Rightarrow \quad \mathbf{t} = \mathbf{R} \cdot \mathcal{F}_{\tau \leq t} [\mathbf{U}, T, \vec{G}, \vec{X}] \cdot \mathbf{R}^T$$

Materiálová objektivita - pokračování

Z předchozí strany máme:

$$\mathbf{t}(\vec{X}, t) = \mathcal{F}_{\tau \leq t} \left[\mathbf{F}(\vec{X}, \tau), T(\vec{X}, \tau), \vec{G}(\vec{X}, \tau), \vec{X} \right]$$

Uvažujme nyní další speciální volbu $\mathbf{O}(\tau)$, konkrétně $\mathbf{O}(\tau) = \mathbf{R}^T(\vec{X}, \tau)$, viz polární rozklad $\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U}$:

$$\mathbf{R}^T(\vec{X}, t) \cdot \mathcal{F}_{\tau \leq t} \left[\mathbf{F}(\vec{X}, \tau), T(\vec{X}, \tau), \vec{G}(\vec{X}, \tau), \vec{X} \right] \cdot \mathbf{R}(\vec{X}, t) = \mathcal{F}_{\tau \leq t} \left[\mathbf{R}^T(\vec{X}, \tau) \cdot \mathbf{F}(\vec{X}, \tau), T(\vec{X}, \tau), \vec{G}(\vec{X}, \tau), \vec{X} \right]$$



$$\mathbf{t}(\vec{X}, t) = \mathcal{F}_{\tau \leq t} \left[\mathbf{F}(\vec{X}, \tau), T(\vec{X}, \tau), \vec{G}(\vec{X}, \tau), \vec{X} \right] = \mathbf{R}(\vec{X}, t) \cdot \mathcal{F}_{\tau \leq t} \left[\mathbf{U}(\vec{X}, \tau), T(\vec{X}, \tau), \vec{G}(\vec{X}, \tau), \vec{X} \right] \cdot \mathbf{R}^T(\vec{X}, t)$$

Materiálová objektivita - pokračování

Z předchozí strany máme:

$$\mathbf{t}(\vec{X}, t) = \mathcal{F}_{\tau \leq t} \left[\mathbf{F}(\vec{X}, \tau), T(\vec{X}, \tau), \vec{G}(\vec{X}, \tau), \vec{X} \right]$$

Uvažujme nyní další speciální volbu $\mathbf{O}(\tau)$, konkrétně $\mathbf{O}(\tau) = \mathbf{R}^T(\vec{X}, \tau)$, viz polární rozklad $\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U}$:

$$\mathbf{R}^T(\vec{X}, t) \cdot \mathcal{F}_{\tau \leq t} \left[\mathbf{F}(\vec{X}, \tau), T(\vec{X}, \tau), \vec{G}(\vec{X}, \tau), \vec{X} \right] \cdot \mathbf{R}(\vec{X}, t) = \mathcal{F}_{\tau \leq t} \left[\mathbf{R}^T(\vec{X}, \tau) \cdot \mathbf{F}(\vec{X}, \tau), T(\vec{X}, \tau), \vec{G}(\vec{X}, \tau), \vec{X} \right]$$



$$\mathbf{t}(\vec{X}, t) = \mathcal{F}_{\tau \leq t} \left[\mathbf{F}(\vec{X}, \tau), T(\vec{X}, \tau), \vec{G}(\vec{X}, \tau), \vec{X} \right] = \mathbf{R}(\vec{X}, t) \cdot \mathcal{F}_{\tau \leq t} \left[\mathbf{U}(\vec{X}, \tau), T(\vec{X}, \tau), \vec{G}(\vec{X}, \tau), \vec{X} \right] \cdot \mathbf{R}^T(\vec{X}, t)$$

Jedná se o nutnou a současně i postačující podmínku materiálové objektivity (pro důkaz druhého tvrzení použij, že $\mathbf{O} \cdot \mathbf{F} = (\mathbf{O} \cdot \mathbf{R}) \cdot \mathbf{U}$).

Materiálová objektivita – redukovaný tvar funkcionálu

Z předchozí strany máme:

$$\mathbf{t}(\vec{X}, t) = \mathcal{F}_{\tau \leq t} \left[\mathbf{F}(\vec{X}, \tau), T(\vec{X}, \tau), \vec{G}(\vec{X}, \tau), \vec{X} \right]$$

Uvažujme nyní další speciální volbu $\mathbf{O}(\tau)$, konkrétně $\mathbf{O}(\tau) = \mathbf{R}^T(\vec{X}, \tau)$, viz polární rozklad $\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U}$:

$$\mathbf{R}^T(\vec{X}, t) \cdot \mathcal{F}_{\tau \leq t} \left[\mathbf{F}(\vec{X}, \tau), T(\vec{X}, \tau), \vec{G}(\vec{X}, \tau), \vec{X} \right] \cdot \mathbf{R}(\vec{X}, t) = \mathcal{F}_{\tau \leq t} \left[\mathbf{R}^T(\vec{X}, \tau) \cdot \mathbf{F}(\vec{X}, \tau), T(\vec{X}, \tau), \vec{G}(\vec{X}, \tau), \vec{X} \right]$$



$$\mathbf{t}(\vec{X}, t) = \mathcal{F}_{\tau \leq t} \left[\mathbf{F}(\vec{X}, \tau), T(\vec{X}, \tau), \vec{G}(\vec{X}, \tau), \vec{X} \right] = \mathbf{R}(\vec{X}, t) \cdot \mathcal{F}_{\tau \leq t} \left[\mathbf{U}(\vec{X}, \tau), T(\vec{X}, \tau), \vec{G}(\vec{X}, \tau), \vec{X} \right] \cdot \mathbf{R}^T(\vec{X}, t)$$

Jedná se o nutnou a současně i postačující podmínku materiálové objektivity (pro důkaz druhého tvrzení použij, že $\mathbf{O} \cdot \mathbf{F} = (\mathbf{O} \cdot \mathbf{R}) \cdot \mathbf{U}$).

Reologický vztah pro jednoduché materiály lze tedy v materiálově objektivním tvaru vyjádřit jako

$$\mathbf{t}(\vec{X}, t) = \mathbf{R}(\vec{X}, t) \cdot \mathcal{F}_{\tau \leq t} \left[\mathbf{U}(\vec{X}, \tau), T(\vec{X}, \tau), \vec{G}(\vec{X}, \tau), \vec{X} \right] \cdot \mathbf{R}^T(\vec{X}, t)$$

nebo, použijeme-li $\mathbf{U} = \sqrt{\mathbf{C}}$ $\mathbf{t}(\vec{X}, t) = \mathbf{R}(\vec{X}, t) \cdot \mathcal{F}_{\tau \leq t} \left[\mathbf{C}(\vec{X}, \tau), T(\vec{X}, \tau), \vec{G}(\vec{X}, \tau), \vec{X} \right] \cdot \mathbf{R}^T(\vec{X}, t)$

nebo, použijeme-li $\mathbf{R} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{U}^{-1}$ $\mathbf{t}(\vec{X}, t) = \mathbf{F}(\vec{X}, t) \cdot \mathcal{F}_{\tau \leq t} \left[\mathbf{C}(\vec{X}, \tau), T(\vec{X}, \tau), \vec{G}(\vec{X}, \tau), \vec{X} \right] \cdot \mathbf{F}^T(\vec{X}, t)$

Materiálová objektivita – redukovaný tvar funkcionálu

Z předchozí strany máme:

$$\mathbf{t}(\vec{X}, t) = \mathcal{F}_{\tau \leq t} \left[\mathbf{F}(\vec{X}, \tau), T(\vec{X}, \tau), \vec{G}(\vec{X}, \tau), \vec{X} \right]$$

Uvažujme nyní další speciální volbu $\mathbf{O}(\tau)$, konkrétně $\mathbf{O}(\tau) = \mathbf{R}^T(\vec{X}, \tau)$, viz polární rozklad $\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U}$:

$$\mathbf{R}^T(\vec{X}, t) \cdot \mathcal{F}_{\tau \leq t} \left[\mathbf{F}(\vec{X}, \tau), T(\vec{X}, \tau), \vec{G}(\vec{X}, \tau), \vec{X} \right] \cdot \mathbf{R}(\vec{X}, t) = \mathcal{F}_{\tau \leq t} \left[\mathbf{R}^T(\vec{X}, \tau) \cdot \mathbf{F}(\vec{X}, \tau), T(\vec{X}, \tau), \vec{G}(\vec{X}, \tau), \vec{X} \right]$$



$$\mathbf{t}(\vec{X}, t) = \mathcal{F}_{\tau \leq t} \left[\mathbf{F}(\vec{X}, \tau), T(\vec{X}, \tau), \vec{G}(\vec{X}, \tau), \vec{X} \right] = \mathbf{R}(\vec{X}, t) \cdot \mathcal{F}_{\tau \leq t} \left[\mathbf{U}(\vec{X}, \tau), T(\vec{X}, \tau), \vec{G}(\vec{X}, \tau), \vec{X} \right] \cdot \mathbf{R}^T(\vec{X}, t)$$

Jedná se o nutnou a současně i postačující podmínku materiálové objektivit (pro důkaz druhého tvrzení použij, že $\mathbf{O} \cdot \mathbf{F} = (\mathbf{O} \cdot \mathbf{R}) \cdot \mathbf{U}$).

Reologický vztah pro jednoduché materiály lze tedy v materiálově objektivním tvaru vyjádřit jako

$$\mathbf{t}(\vec{X}, t) = \mathbf{R}(\vec{X}, t) \cdot \mathcal{F}_{\tau \leq t} \left[\mathbf{U}(\vec{X}, \tau), T(\vec{X}, \tau), \vec{G}(\vec{X}, \tau), \vec{X} \right] \cdot \mathbf{R}^T(\vec{X}, t)$$

nebo, použijeme-li $\mathbf{U} = \sqrt{\mathbf{C}}$ $\mathbf{t}(\vec{X}, t) = \mathbf{R}(\vec{X}, t) \cdot \mathcal{F}_{\tau \leq t} \left[\mathbf{C}(\vec{X}, \tau), T(\vec{X}, \tau), \vec{G}(\vec{X}, \tau), \vec{X} \right] \cdot \mathbf{R}^T(\vec{X}, t)$

nebo, použijeme-li $\mathbf{R} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{U}^{-1}$ $\mathbf{t}(\vec{X}, t) = \mathbf{F}(\vec{X}, t) \cdot \mathcal{F}_{\tau \leq t} \left[\mathbf{C}(\vec{X}, \tau), T(\vec{X}, \tau), \vec{G}(\vec{X}, \tau), \vec{X} \right] \cdot \mathbf{F}^T(\vec{X}, t)$

Analogicky lze odvodit také materiálově objektivní tvary ostatních konstitutivních vztahů:

$$\vec{q}(\vec{X}, t) = \mathbf{R}(\vec{X}, t) \cdot \mathcal{Q}_{\tau \leq t} \left[\mathbf{C}(\vec{X}, \tau), T(\vec{X}, \tau), \vec{G}(\vec{X}, \tau), \vec{X} \right]$$

$$\epsilon(\vec{X}, t) = \mathcal{E}_{\tau \leq t} \left[\mathbf{C}(\vec{X}, \tau), T(\vec{X}, \tau), \vec{G}(\vec{X}, \tau), \vec{X} \right]$$

materiálově objektivní tvary reologických vztahů pro jednoduché materiály

Odvoďme ještě materiálově objektivní vztah pro druhý Piola-Kirchhoffův tenzor. Vyjdeme z definice tohoto tenzoru,

$$\mathbf{T}^{(2)} = J\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{t} \cdot \mathbf{F}^{-T}$$

Odvoďme ještě materiálově objektivní vztah pro druhý Piola-Kirchhoffův tenzor. Vyjdeme z definice tohoto tenzoru,

$$\mathbf{T}^{(2)} = J \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{t} \cdot \mathbf{F}^{-T}$$

využijeme toho, že $J = \det \mathbf{F} = \det(\mathbf{R} \cdot \mathbf{U}) = \det \mathbf{U} = \sqrt{\det \mathbf{C}}$,

Odvoďme ještě materiálově objektivní vztah pro druhý Piola-Kirchhoffův tenzor. Vyjdeme z definice tohoto tenzoru,

$$\mathbf{T}^{(2)} = J \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{t} \cdot \mathbf{F}^{-\mathbf{T}}$$

využijeme toho, že $J = \det \mathbf{F} = \det(\mathbf{R} \cdot \mathbf{U}) = \det \mathbf{U} = \sqrt{\det \mathbf{C}}$, a použijeme vztah z předchozí strany

$$\mathbf{t}(\vec{X}, t) = \mathbf{F}(\vec{X}, t) \cdot \tilde{\mathcal{F}}_{\tau \leq t} \left[\mathbf{C}(\vec{X}, \tau), T(\vec{X}, \tau), \vec{G}(\vec{X}, \tau), \vec{X} \right] \cdot \mathbf{F}^{\mathbf{T}}(\vec{X}, t).$$

Odvoďme ještě materiálově objektivní vztah pro druhý Piola-Kirchhoffův tenzor. Vyjdeme z definice tohoto tenzoru,

$$\mathbf{T}^{(2)} = J\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{t} \cdot \mathbf{F}^{-\mathbf{T}}$$

využijeme toho, že $J = \det \mathbf{F} = \det(\mathbf{R} \cdot \mathbf{U}) = \det \mathbf{U} = \sqrt{\det \mathbf{C}}$, a použijeme vztah z předchozí strany

$$\mathbf{t}(\vec{X}, t) = \mathbf{F}(\vec{X}, t) \cdot \tilde{\mathcal{F}}_{\tau \leq t} \left[\mathbf{C}(\vec{X}, \tau), T(\vec{X}, \tau), \vec{G}(\vec{X}, \tau), \vec{X} \right] \cdot \mathbf{F}^{\mathbf{T}}(\vec{X}, t).$$

Dostaneme pak

$$\mathbf{T}^{(2)} = J\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{t} \cdot \mathbf{F}^{-\mathbf{T}} = J\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{F}(\vec{X}, t) \cdot \tilde{\mathcal{F}}_{\tau \leq t} \left[\mathbf{C}(\vec{X}, \tau), T(\vec{X}, \tau), \vec{G}(\vec{X}, \tau), \vec{X} \right] \cdot \mathbf{F}^{\mathbf{T}}(\vec{X}, t) \cdot \mathbf{F}^{-\mathbf{T}} =$$

Odvoďme ještě materiálově objektivní vztah pro druhý Piola-Kirchhoffův tenzor. Vyjdeme z definice tohoto tenzoru,

$$\mathbf{T}^{(2)} = J \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{t} \cdot \mathbf{F}^{-\mathbf{T}}$$

využijeme toho, že $J = \det \mathbf{F} = \det(\mathbf{R} \cdot \mathbf{U}) = \det \mathbf{U} = \sqrt{\det \mathbf{C}}$, a použijeme vztah z předchozí strany

$$\mathbf{t}(\vec{X}, t) = \mathbf{F}(\vec{X}, t) \cdot \tilde{\mathcal{F}}_{\tau \leq t} \left[\mathbf{C}(\vec{X}, \tau), T(\vec{X}, \tau), \vec{G}(\vec{X}, \tau), \vec{X} \right] \cdot \mathbf{F}^{\mathbf{T}}(\vec{X}, t).$$

Dostaneme pak

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^{(2)} &= J \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{t} \cdot \mathbf{F}^{-\mathbf{T}} = J \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{F}(\vec{X}, t) \cdot \tilde{\mathcal{F}}_{\tau \leq t} \left[\mathbf{C}(\vec{X}, \tau), T(\vec{X}, \tau), \vec{G}(\vec{X}, \tau), \vec{X} \right] \cdot \mathbf{F}^{\mathbf{T}}(\vec{X}, t) \cdot \mathbf{F}^{-\mathbf{T}} = \\ &= \sqrt{(\det C)} \tilde{\mathcal{F}}_{\tau \leq t} \left[\mathbf{C}(\vec{X}, \tau), T(\vec{X}, \tau), \vec{G}(\vec{X}, \tau), \vec{X} \right] = \mathcal{G}_{\tau \leq t} \left[\mathbf{C}(\vec{X}, \tau), T(\vec{X}, \tau), \vec{G}(\vec{X}, \tau), \vec{X} \right] \end{aligned}$$

Odvoďme ještě materiálově objektivní vztah pro druhý Piola-Kirchhoffův tenzor. Vyjdeme z definice tohoto tenzoru,

$$\mathbf{T}^{(2)} = J\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{t} \cdot \mathbf{F}^{-\mathbf{T}}$$

využijeme toho, že $J = \det \mathbf{F} = \det(\mathbf{R} \cdot \mathbf{U}) = \det \mathbf{U} = \sqrt{\det \mathbf{C}}$, a použijeme vztah z předchozí strany

$$\mathbf{t}(\vec{X}, t) = \mathbf{F}(\vec{X}, t) \cdot \tilde{\mathcal{F}}_{\tau \leq t} \left[\mathbf{C}(\vec{X}, \tau), T(\vec{X}, \tau), \vec{G}(\vec{X}, \tau), \vec{X} \right] \cdot \mathbf{F}^{\mathbf{T}}(\vec{X}, t).$$

Dostaneme pak

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^{(2)} &= J\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{t} \cdot \mathbf{F}^{-\mathbf{T}} = J\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{F}(\vec{X}, t) \cdot \tilde{\mathcal{F}}_{\tau \leq t} \left[\mathbf{C}(\vec{X}, \tau), T(\vec{X}, \tau), \vec{G}(\vec{X}, \tau), \vec{X} \right] \cdot \mathbf{F}^{\mathbf{T}}(\vec{X}, t) \cdot \mathbf{F}^{-\mathbf{T}} = \\ &= \sqrt{(\det C)} \tilde{\mathcal{F}}_{\tau \leq t} \left[\mathbf{C}(\vec{X}, \tau), T(\vec{X}, \tau), \vec{G}(\vec{X}, \tau), \vec{X} \right] = \mathcal{G}_{\tau \leq t} \left[\mathbf{C}(\vec{X}, \tau), T(\vec{X}, \tau), \vec{G}(\vec{X}, \tau), \vec{X} \right] \end{aligned}$$

$$\mathbf{T}^{(2)}(\vec{X}, t) = \mathcal{G}_{\tau \leq t} \left[\mathbf{C}(\vec{X}, \tau), T(\vec{X}, \tau), \vec{G}(\vec{X}, \tau), \vec{X} \right]$$

← materiálově objektivní tvar
reologického vztahu pro PK-2

Odvoďme ještě materiálově objektivní vztah pro druhý Piola-Kirchhoffův tenzor. Vyjdeme z definice tohoto tenzoru,

$$\mathbf{T}^{(2)} = J\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{t} \cdot \mathbf{F}^{-\mathbf{T}}$$

využijeme toho, že $J = \det \mathbf{F} = \det(\mathbf{R} \cdot \mathbf{U}) = \det \mathbf{U} = \sqrt{\det \mathbf{C}}$, a použijeme vztah z předchozí strany

$$\mathbf{t}(\vec{X}, t) = \mathbf{F}(\vec{X}, t) \cdot \tilde{\mathcal{F}}_{\tau \leq t} \left[\mathbf{C}(\vec{X}, \tau), T(\vec{X}, \tau), \vec{G}(\vec{X}, \tau), \vec{X} \right] \cdot \mathbf{F}^{\mathbf{T}}(\vec{X}, t).$$

Dostaneme pak

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^{(2)} &= J\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{t} \cdot \mathbf{F}^{-\mathbf{T}} = J\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{F}(\vec{X}, t) \cdot \tilde{\mathcal{F}}_{\tau \leq t} \left[\mathbf{C}(\vec{X}, \tau), T(\vec{X}, \tau), \vec{G}(\vec{X}, \tau), \vec{X} \right] \cdot \mathbf{F}^{\mathbf{T}}(\vec{X}, t) \cdot \mathbf{F}^{-\mathbf{T}} = \\ &= \sqrt{(\det C)} \tilde{\mathcal{F}}_{\tau \leq t} \left[\mathbf{C}(\vec{X}, \tau), T(\vec{X}, \tau), \vec{G}(\vec{X}, \tau), \vec{X} \right] = \mathcal{G}_{\tau \leq t} \left[\mathbf{C}(\vec{X}, \tau), T(\vec{X}, \tau), \vec{G}(\vec{X}, \tau), \vec{X} \right] \end{aligned}$$

$$\mathbf{T}^{(2)}(\vec{X}, t) = \mathcal{G}_{\tau \leq t} \left[\mathbf{C}(\vec{X}, \tau), T(\vec{X}, \tau), \vec{G}(\vec{X}, \tau), \vec{X} \right]$$

← materiálově objektivní tvar
reologického vztahu pro PK-2

Analogicky pak dostaneme pro tepelný tok v referenční konfiguraci (použij $\vec{Q} = J\mathbf{F}^{-1} \cdot \vec{q}$):

$$\vec{Q}(\vec{X}, t) = \tilde{\mathcal{Q}}_{\tau \leq t} \left[\mathbf{C}(\vec{X}, \tau), T(\vec{X}, \tau), \vec{G}(\vec{X}, \tau), \vec{X} \right]$$

Materiály s omezenou pamětí

Budeme předpokládat, že deformační a teplotní události ve vzdálené minulosti mají jen omezený vliv na teplotně-deformační vývoj v současnosti.

Uvažujme Taylorův rozvoj a aplikujme jej na veličiny v konstitutivních vztazích:

$$h(\vec{X}, \tau) = \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} \left(\frac{\partial^n h(\vec{X}, \tau)}{\partial \tau^n} \right)_{\tau=t} (\tau - t)^n = \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} \underline{h^{(n)}(\vec{X}, t)} (\tau - t)^n$$

Materiály s omezenou pamětí

Budeme předpokládat, že deformační a teplotní události ve vzdálené minulosti mají jen omezený vliv na teplotně-deformační vývoj v současnosti.

Uvažujme Taylorův rozvoj a aplikujme jej na veličiny v konstitutivních vztazích:

$$h(\vec{X}, \tau) = \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} \left(\frac{\partial^n h(\vec{X}, \tau)}{\partial \tau^n} \right)_{\tau=t} (\tau - t)^n = \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} \underline{h^{(n)}(\vec{X}, t)} (\tau - t)^n$$

Materiálový vztah ve tvaru *funkcionálu*

$$\mathbf{T}^{(2)}(\vec{X}, t) = \mathcal{G}_{\tau \leq t} \left[\mathbf{C}(\vec{X}, \tau), T(\vec{X}, \tau), \vec{G}(\vec{X}, \tau) \right]$$

pak může být vyjádřen ve tvaru *funkce*

$$\mathbf{T}^{(2)}(\vec{X}, t) = \tilde{\mathbf{T}}^{(2)} \left(\mathbf{C}, \dot{\mathbf{C}}, \dots, \overset{(N)}{\mathbf{C}}, T, \dot{T}, \dots, \overset{(N)}{T}, \vec{G}, \dot{\vec{G}}, \dots, \overset{(N)}{\vec{G}} \right)$$

materiál rychlostního typu
← stupně N

Materiály s omezenou pamětí

Budeme předpokládat, že deformační a teplotní události ve vzdálené minulosti mají jen omezený vliv na teplotně-deformační vývoj v současnosti.

Uvažujme Taylorův rozvoj a aplikujme jej na veličiny v konstitutivních vztazích:

$$h(\vec{X}, \tau) = \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} \left(\frac{\partial^n h(\vec{X}, \tau)}{\partial \tau^n} \right)_{\tau=t} (\tau - t)^n = \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} \underline{h^{(n)}(\vec{X}, t)} (\tau - t)^n$$

Materiálový vztah ve tvaru *funkcionálu*

$$\mathbf{T}^{(2)}(\vec{X}, t) = \mathcal{G}_{\tau \leq t} \left[\mathbf{C}(\vec{X}, \tau), T(\vec{X}, \tau), \vec{G}(\vec{X}, \tau) \right]$$

pak může být vyjádřen ve tvaru *funkce*

$$\mathbf{T}^{(2)}(\vec{X}, t) = \tilde{\mathbf{T}}^{(2)} \left(\mathbf{C}, \dot{\mathbf{C}}, \dots, \overset{(N)}{\mathbf{C}}, T, \dot{T}, \dots, \overset{(N)}{T}, \vec{G}, \dot{\vec{G}}, \dots, \overset{(N)}{\vec{G}} \right) \quad \begin{array}{l} \text{materiál rychlostního typu} \\ \longleftarrow \text{stupně } N \end{array}$$

Analogicky můžeme *funkcionál* v konstitutivním vztahu pro Cauchyho tenzor napětí

$$\mathbf{t}(\vec{X}, t) = \mathbf{R}(\vec{X}, t) \cdot \bar{\mathcal{F}}_{\tau \leq t} \left[\mathbf{C}(\vec{X}, \tau), T(\vec{X}, \tau), \vec{G}(\vec{X}, \tau) \right] \cdot \mathbf{R}^T(\vec{X}, t)$$

nahradit *funkcí*

$$\mathbf{t}(\vec{X}, t) = \mathbf{R}(\vec{X}, t) \cdot \hat{\mathbf{t}} \left(\mathbf{C}, \dot{\mathbf{C}}, \dots, \overset{(N)}{\mathbf{C}}, T, \dot{T}, \dots, \overset{(N)}{T}, \vec{G}, \dot{\vec{G}}, \dots, \overset{(N)}{\vec{G}} \right) \cdot \mathbf{R}^T(\vec{X}, t)$$

$$\mathcal{F}_R \left[\mathbf{F}(\vec{X}, \tau) \cdot \mathbf{P}(\vec{X}), \theta(\vec{X}, \tau), \vec{G}_\theta(\vec{X}, \tau) \cdot \mathbf{P}(\vec{X}) \right]_{\tau \leq t} = \mathcal{F}_R \left[\mathbf{F}(\vec{X}, \tau), \theta(\vec{X}, \tau), \vec{G}_\theta(\vec{X}, \tau) \right]_{\tau \leq t} . \quad (6.70)$$

v redukovaném tvaru:

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(\vec{X}) \cdot \tilde{\mathcal{F}}_R \left[\mathbf{C}(\vec{X}, \tau), \theta(\vec{X}, \tau), \vec{G}_\theta(\vec{X}, \tau) \right]_{\tau \leq t} \cdot \mathbf{P}^T(\vec{X}) \\ &= \tilde{\mathcal{F}}_R \left[\mathbf{P}^{-T}(\vec{X}) \cdot \mathbf{C}(\vec{X}, \tau) \cdot \mathbf{P}^{-1}(\vec{X}), \theta(\vec{X}, \tau), \vec{G}_\theta(\vec{X}, \tau) \cdot \mathbf{P}^{-1}(\vec{X}) \right]_{\tau \leq t} . \end{aligned} \quad (6.75)$$

Reprezentační teorémy pro izotropní funkce

Skalární izotropní funkce vektoru $\vec{v}$ a tenzoru $\mathbf{S}$ je definována předpisem

$$a(\vec{v}, \mathbf{S}) = a(\mathbf{Q} \cdot \vec{v}, \mathbf{Q} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{Q}^T)$$

pro všechny ortogonální tenzory $\mathbf{Q}$. Izotropní funkce tedy nezávisí na složkách vektoru $\vec{v}$ a tenzoru $\mathbf{S}$, ale pouze na jejich invariantech.

Reprezentační teorémy pro izotropní funkce

Skalární izotropní funkce vektoru $\vec{v}$ a tenzoru $\mathbf{S}$ je definována předpisem

$$a(\vec{v}, \mathbf{S}) = a(\mathbf{Q} \cdot \vec{v}, \mathbf{Q} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{Q}^T)$$

pro všechny ortogonální tenzory $\mathbf{Q}$. Izotropní funkce tedy nezávisí na složkách vektoru $\vec{v}$ a tenzoru $\mathbf{S}$, ale pouze na jejich invariantech. Nezávislé invarianty jsou následující:

$$\vec{v} \cdot \vec{v}, \quad I_S = \text{tr } \mathbf{S}, \quad II_S = \frac{1}{2} [(\text{tr } \mathbf{S})^2 - \text{tr } \mathbf{S}^2], \quad III_S = \det \mathbf{S}, \quad \vec{v} \cdot \mathbf{S} \cdot \vec{v}, \quad \vec{v} \cdot \mathbf{S}^2 \cdot \vec{v} \quad \text{viz Cayley-Hamiltonova věta}$$

Reprezentační teorémy pro izotropní funkce

Skalární izotropní funkce vektoru $\vec{v}$ a tenzoru $\mathbf{S}$ je definována předpisem

$$a(\vec{v}, \mathbf{S}) = a(\mathbf{Q} \cdot \vec{v}, \mathbf{Q} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{Q}^T)$$

pro všechny ortogonální tenzory $\mathbf{Q}$. Izotropní funkce tedy nezávisí na složkách vektoru $\vec{v}$ a tenzoru $\mathbf{S}$, ale pouze na jejich invariantech. Nezávislé invarianty jsou následující:

$$\vec{v} \cdot \vec{v}, \quad I_S = \text{tr } \mathbf{S}, \quad II_S = \frac{1}{2} [(\text{tr } \mathbf{S})^2 - \text{tr } \mathbf{S}^2], \quad III_S = \det \mathbf{S}, \quad \vec{v} \cdot \mathbf{S} \cdot \vec{v}, \quad \vec{v} \cdot \mathbf{S}^2 \cdot \vec{v} \quad \text{viz Cayley-Hamiltonova věta}$$

Izotropní skalární funkce může být tedy reprezentována ve tvaru

$$a(\vec{v}, \mathbf{S}) = a(\vec{v} \cdot \vec{v}, I_S, II_S, III_S, \vec{v} \cdot \mathbf{S} \cdot \vec{v}, \vec{v} \cdot \mathbf{S}^2 \cdot \vec{v})$$

Reprezentační teorémy pro izotropní funkce

Skalární izotropní funkce vektoru $\vec{v}$ a tenzoru $\mathbf{S}$ je definována předpisem

$$a(\vec{v}, \mathbf{S}) = a(\mathbf{Q} \cdot \vec{v}, \mathbf{Q} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{Q}^T)$$

pro všechny ortogonální tenzory $\mathbf{Q}$. Izotropní funkce tedy nezávisí na složkách vektoru $\vec{v}$ a tenzoru $\mathbf{S}$, ale pouze na jejich invariantech. Nezávislé invarianty jsou následující:

$$\vec{v} \cdot \vec{v}, \quad I_S = \text{tr } \mathbf{S}, \quad II_S = \frac{1}{2} [(\text{tr } \mathbf{S})^2 - \text{tr } \mathbf{S}^2], \quad III_S = \det \mathbf{S}, \quad \vec{v} \cdot \mathbf{S} \cdot \vec{v}, \quad \vec{v} \cdot \mathbf{S}^2 \cdot \vec{v} \quad \text{viz Cayley-Hamiltonova věta}$$

Izotropní skalární funkce může být tedy reprezentována ve tvaru

$$a(\vec{v}, \mathbf{S}) = a(\vec{v} \cdot \vec{v}, I_S, II_S, III_S, \vec{v} \cdot \mathbf{S} \cdot \vec{v}, \vec{v} \cdot \mathbf{S}^2 \cdot \vec{v})$$

Izotropní vektorové a symetrické tenzorové funkce $\vec{b}$, $\mathbf{T}$ jsou definovány předpisem

$$\mathbf{Q} \cdot \vec{b}(\vec{v}, \mathbf{S}) = \vec{b}(\mathbf{Q} \cdot \vec{v}, \mathbf{Q} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{Q}^T), \quad \mathbf{Q} \cdot \mathbf{T}(\vec{v}, \mathbf{S}) \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{T}(\mathbf{Q} \cdot \vec{v}, \mathbf{Q} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{Q}^T)$$

Reprezentační teorémy pro izotropní funkce

Skalární izotropní funkce vektoru $\vec{v}$ a tenzoru $\mathbf{S}$ je definována předpisem

$$a(\vec{v}, \mathbf{S}) = a(\mathbf{Q} \cdot \vec{v}, \mathbf{Q} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{Q}^T)$$

pro všechny ortogonální tenzory $\mathbf{Q}$. Izotropní funkce tedy nezávisí na složkách vektoru $\vec{v}$ a tenzoru $\mathbf{S}$, ale pouze na jejich invariantech. Nezávislé invarianty jsou následující:

$$\vec{v} \cdot \vec{v}, \quad I_S = \text{tr } \mathbf{S}, \quad II_S = \frac{1}{2} [(\text{tr } \mathbf{S})^2 - \text{tr } \mathbf{S}^2], \quad III_S = \det \mathbf{S}, \quad \vec{v} \cdot \mathbf{S} \cdot \vec{v}, \quad \vec{v} \cdot \mathbf{S}^2 \cdot \vec{v} \quad \text{viz Cayley-Hamiltonova věta}$$

Izotropní skalární funkce může být tedy reprezentována ve tvaru

$$a(\vec{v}, \mathbf{S}) = a(\vec{v} \cdot \vec{v}, I_S, II_S, III_S, \vec{v} \cdot \mathbf{S} \cdot \vec{v}, \vec{v} \cdot \mathbf{S}^2 \cdot \vec{v})$$

Izotropní vektorové a symetrické tenzorové funkce $\vec{b}$, $\mathbf{T}$ jsou definovány předpisem

$$\mathbf{Q} \cdot \vec{b}(\vec{v}, \mathbf{S}) = \vec{b}(\mathbf{Q} \cdot \vec{v}, \mathbf{Q} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{Q}^T), \quad \mathbf{Q} \cdot \mathbf{T}(\vec{v}, \mathbf{S}) \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{T}(\mathbf{Q} \cdot \vec{v}, \mathbf{Q} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{Q}^T)$$

a mohou být reprezentovány (bez odvození) následovně:

$$\vec{b} = a_0 \vec{v} + a_1 \mathbf{S} \cdot \vec{v} + a_2 \mathbf{S}^2 \cdot \vec{v}$$

$$\mathbf{T} = a_0 \mathbf{I} + a_1 \mathbf{S} + a_2 \mathbf{S}^2 + a_3 \vec{v} \otimes \vec{v} + a_4 \text{sym}(\mathbf{S} \cdot \vec{v} \otimes \vec{v}) + a_5 (\mathbf{S}^2 \cdot \vec{v} \otimes \vec{v}),$$

kde

$$a_i = a_i(\vec{v} \cdot \vec{v}, I_S, II_S, III_S, \vec{v} \cdot \mathbf{S} \cdot \vec{v}, \vec{v} \cdot \text{sym } \mathbf{S}^2 \cdot \vec{v})$$

Příklad: Izotropní elastický materiál

Příklad: Izotropní elastický materiál

Požadujeme, aby napěťový tenzor

(i) závisel pouze na okamžitém deformačním gradientu a (ii) nezávisel na teplotě a deformační minulosti.

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}(\mathbf{F})$$

Příklad: Izotropní elastický materiál

Požadujeme, aby napěťový tenzor

(i) závisel pouze na okamžitém deformačním gradientu a (ii) nezávisel na teplotě a deformační minulosti.

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}(\mathbf{F})$$

1. Uplatníme požadavek materiálové objektivity

Závislost tenzoru napětí nemůže být libovolná, ale musí mít následující tvar, který zaručuje, že konstitutivní vztah je invariantní vůči změně pozorovatele:

$$\mathbf{t} = \mathbf{R} \cdot \hat{\mathbf{t}}(\mathbf{C}) \cdot \mathbf{R}^T, \quad \text{kde} \quad \mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}, \quad \mathbf{R} = \mathbf{F} \cdot (\sqrt{\mathbf{C}})^{-1} \quad (\text{viz polární rozklad})$$

Příklad: Izotropní elastický materiál

Požadujeme, aby napěťový tenzor

(i) závisel pouze na okamžitém deformačním gradientu a (ii) nezávisel na teplotě a deformační minulosti.

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}(\mathbf{F})$$

1. Uplatníme požadavek materiálové objektivity

Závislost tenzoru napětí nemůže být libovolná, ale musí mít následující tvar, který zaručuje, že konstitutivní vztah je invariantní vůči změně pozorovatele:

$$\mathbf{t} = \mathbf{R} \cdot \hat{\mathbf{t}}(\mathbf{C}) \cdot \mathbf{R}^T, \quad \text{kde} \quad \mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}, \quad \mathbf{R} = \mathbf{F} \cdot (\sqrt{\mathbf{C}})^{-1} \quad (\text{viz polární rozklad})$$

2. Uplatníme požadavek izotropie

Aby materiál byl izotropní, musí být $\mathbf{t}$ izotropní funkcí $\mathbf{C}$. Podle věty o reprezentaci izotropní funkce pak musí platit

$$\mathbf{t} = \mathbf{R} \cdot (a_0 \mathbf{I} + a_1 \mathbf{C} + a_2 \mathbf{C}^2) \cdot \mathbf{R}^T, \quad \text{kde} \quad a_0, a_1, a_2 \quad \text{jsou funkce invariantů} \quad I_C, II_C, III_C,$$

Příklad: Izotropní elastický materiál

Požadujeme, aby napěťový tenzor

(i) závisel pouze na okamžitém deformačním gradientu a (ii) nezávisel na teplotě a deformační minulosti.

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}(\mathbf{F})$$

1. Uplatníme požadavek materiálové objektivity

Závislost tenzoru napětí nemůže být libovolná, ale musí mít následující tvar, který zaručuje, že konstitutivní vztah je invariantní vůči změně pozorovatele:

$$\mathbf{t} = \mathbf{R} \cdot \hat{\mathbf{t}}(\mathbf{C}) \cdot \mathbf{R}^T, \quad \text{kde} \quad \mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}, \quad \mathbf{R} = \mathbf{F} \cdot (\sqrt{\mathbf{C}})^{-1} \quad (\text{viz polární rozklad})$$

2. Uplatníme požadavek izotropie

Aby materiál byl izotropní, musí být $\mathbf{t}$ izotropní funkcí $\mathbf{C}$. Podle věty o reprezentaci izotropní funkce pak musí platit

$$\mathbf{t} = \mathbf{R} \cdot (a_0 \mathbf{I} + a_1 \mathbf{C} + a_2 \mathbf{C}^2) \cdot \mathbf{R}^T, \quad \text{kde} \quad a_0, a_1, a_2 \quad \text{jsou funkce invariantů} \quad I_C, II_C, III_C,$$

což lze dále upravit do tvaru (viz úplně dole):

$$\mathbf{t} = a_0 \mathbf{I} + a_1 \mathbf{b} + a_2 \mathbf{b}^2, \quad \text{kde} \quad \mathbf{b} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T \quad \text{a} \quad a_i = a_i(I_b, II_b, III_b)$$

← Obecný reologický vztah
pro izotropní elastický materiál

$$\mathbf{b} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T = \mathbf{V}^2 = \mathbf{V}^T \cdot \mathbf{V} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{R}^T = \mathbf{R} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{R}^T, \quad \mathbf{b}^2 = \mathbf{R} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{R}^T = \mathbf{R} \cdot \mathbf{C}^2 \cdot \mathbf{R}^T$$

Tenzory $\mathbf{C}$ a $\mathbf{b}$ mají stejné invarianty, neboť tenzory $\mathbf{V}$ a $\mathbf{U}$ mají stejná vlastní čísla.

Příklad: Izotropní elastický materiál

Požadujeme, aby napěťový tenzor

(i) závisel pouze na okamžitém deformačním gradientu a (ii) nezávisel na teplotě a deformační minulosti.

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}(\mathbf{F})$$

1. Uplatníme požadavek materiálové objektivity

Závislost tenzoru napětí nemůže být libovolná, ale musí mít následující tvar, který zaručuje, že konstitutivní vztah je invariantní vůči změně pozorovatele:

$$\mathbf{t} = \mathbf{R} \cdot \hat{\mathbf{t}}(\mathbf{C}) \cdot \mathbf{R}^T, \quad \text{kde} \quad \mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}, \quad \mathbf{R} = \mathbf{F} \cdot (\sqrt{\mathbf{C}})^{-1} \quad (\text{viz polární rozklad})$$

2. Uplatníme požadavek izotropie

Aby materiál byl izotropní, musí být $\mathbf{t}$ izotropní funkcí $\mathbf{C}$. Podle věty o reprezentaci izotropní funkce pak musí platit

$$\mathbf{t} = \mathbf{R} \cdot (a_0 \mathbf{I} + a_1 \mathbf{C} + a_2 \mathbf{C}^2) \cdot \mathbf{R}^T, \quad \text{kde} \quad a_0, a_1, a_2 \text{ jsou funkce invariantů } I_C, II_C, III_C,$$

což lze dále upravit do tvaru (viz úplně dole):

$$\mathbf{t} = a_0 \mathbf{I} + a_1 \mathbf{b} + a_2 \mathbf{b}^2, \quad \text{kde} \quad \mathbf{b} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T \quad \text{a} \quad a_i = a_i(I_b, II_b, III_b)$$

Obecný reologický vztah
pro izotropní elastický materiál

Odvození v Lagrangeově tvaru

1. Použijeme tvar konstitutivní rovnice pro P-K2 splňující podmínku objektivity: $\mathbf{T}^{(2)} = \hat{\mathbf{T}}^{(2)}(\mathbf{C})$

2. Uplatníme požadavek izotropie

$$\mathbf{T}^{(2)} = a_0 \mathbf{I} + a_1 \mathbf{C} + a_2 \mathbf{C}^2 \quad \text{kde,} \quad a_i = a_i(I_C, II_C, III_C)$$

Obecný reologický vztah
pro izotropní elastický materiál
v Lagrangeově tvaru

$$\mathbf{b} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T = \mathbf{V}^2 = \mathbf{V}^T \cdot \mathbf{V} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{R}^T = \mathbf{R} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{R}^T, \quad \mathbf{b}^2 = \mathbf{R} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{R}^T = \mathbf{R} \cdot \mathbf{C}^2 \cdot \mathbf{R}^T$$

Tenzory $\mathbf{C}$ a $\mathbf{b}$ mají stejné invarianty, neboť tenzory $\mathbf{V}$ a $\mathbf{U}$ mají stejná vlastní čísla.

Příklad: Hookův zákon

Konstitutivní vztah pro izotropní elastický materiál je dán předpisem $\mathbf{t} = a_0 \mathbf{I} + a_1 \mathbf{b} + a_2 \mathbf{b}^2$.

$$\mathbf{b} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T$$

Předpokládejme, že deformace je malá, tj.

$$\mathbf{b} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T = (\mathbf{I} + \mathbf{H}^T) \cdot (\mathbf{I} + \mathbf{H}^T)^T \approx (\mathbf{I} + \mathbf{h}^T) \cdot (\mathbf{I} + \mathbf{h}^T)^T \approx \mathbf{I} + \mathbf{h} + \mathbf{h}^T = \mathbf{I} + 2\tilde{\mathbf{e}}$$

$$\tilde{\mathbf{e}} = \frac{1}{2} (\mathbf{h} + \mathbf{h}^T) = \frac{1}{2} \left[\text{grad } \vec{u} + (\text{grad } \vec{u})^T \right]$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{I} + 2\tilde{\mathbf{e}}$$

$$\mathbf{b}^2 = \mathbf{I} + 4\tilde{\mathbf{e}}$$

$$I_b = \text{tr } \mathbf{b} = \text{tr } (\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T) \approx \text{tr } (\mathbf{I} + 2\tilde{\mathbf{e}}) = 3 + 2 \text{tr } \tilde{\mathbf{e}}$$

$$II_b = 3 + 4 \text{tr } \tilde{\mathbf{e}}, \quad III_b = 1 + 2 \text{tr } \tilde{\mathbf{e}}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{t} &= a_0 \mathbf{I} + a_1 \mathbf{b} + a_2 \mathbf{b}^2 \approx (C_1 + C_2 \text{tr } \tilde{\mathbf{e}}) \mathbf{I} + (C_3 + C_4 \text{tr } \tilde{\mathbf{e}}) (\mathbf{I} + 2\tilde{\mathbf{e}}) + (C_5 + C_6 \text{tr } \tilde{\mathbf{e}}) (\mathbf{I} + 4\tilde{\mathbf{e}}) = \\ &= k_0 \mathbf{I} + k_1 (\text{tr } \tilde{\mathbf{e}}) \mathbf{I} + 2k_2 \tilde{\mathbf{e}}. \end{aligned}$$

$$\mathbf{t} = \lambda (\text{div } \vec{u}) \mathbf{I} + \mu \left[\text{grad } \vec{u} + (\text{grad } \vec{u})^T \right] \quad \leftarrow \text{ Hookův zákon}$$

Kinematické podmínky. Nestlačitelný materiál.

Kinematickou podmínku budeme chápat jako geometrické omezení množiny všech myslitelných pohybů. Kinematická podmínka je tedy zpravidla nějaká vazba, kterou musí splňovat deformační gradient,

$$\lambda(\mathbf{F}) = 0$$

Tuto vazbu můžeme s ohledem na požadavek materiálové objektivit vyjádřit ve tvaru $\lambda(\mathbf{C}) = 0$.

V případě kinematické podmínky je třeba modifikovat princip determinismu. Postulujeme, že jenom část napěťového tenzoru souvisí s historií deformace. V reologické rovnici pak dostaneme přídatný člen:

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\pi} + \mathcal{F}(\mathbf{F}, T, \vec{G})$$

Napětí $\mathbf{t} - \boldsymbol{\pi}$ je jednoznačně určeno pohybem materiálu, zatímco $\boldsymbol{\pi}$ reprezentuje napětí generované kinematickou podmínkou. Předpokládáme, že toto napětí nekoná žádnou práci, tj.

$$\boldsymbol{\pi} : \mathbf{d} = 0$$

Pro PK-2 pak můžeme psát $\mathbf{T}^{(2)} = \boldsymbol{\Pi} + \mathcal{G}(\mathbf{C}, T, \vec{G})$ a podmínku $\boldsymbol{\pi} : \mathbf{d} = 0$ dostaneme ve tvaru

$$0 = \boldsymbol{\pi} : \mathbf{d} = \frac{1}{J}(\mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\Pi} \cdot \mathbf{F}^T) : \frac{1}{2}(\mathbf{F}^{-T} \cdot \dot{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{F}^{-1}) = \frac{1}{2J}(\boldsymbol{\Pi} : \dot{\mathbf{C}}) \rightarrow \boldsymbol{\Pi} : \dot{\mathbf{C}} = 0$$

Derivací kinematické vazby podle času dostaneme $\frac{\partial \lambda}{\partial C_{KL}} \dot{C}_{KL} = \frac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{C}} : \dot{\mathbf{C}} = 0 \rightarrow \boldsymbol{\Pi} = \alpha \frac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{C}}$.

Uvažujme nyní nestlačitelný materiál, tj. kinematickou podmínku ve tvaru $\lambda(\mathbf{C}) = \det \mathbf{C} - 1 = 0$.

Potom $\boldsymbol{\Pi} = \alpha \frac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{C}} = \alpha \frac{\partial}{\partial \mathbf{C}}(\det \mathbf{C} - 1) = \alpha(\det \mathbf{C}) \mathbf{C}^{-1} = \alpha \mathbf{C}^{-1}$ kde jsme použili identitu $\frac{d}{d\mathbf{A}}(\det \mathbf{A}) = (\det \mathbf{A}) \mathbf{A}^{-T}$

Zavedme „tlak“ jako $p = -\alpha$. Reologické vztahy pro nestlačitelný materiál pak můžeme psát ve tvaru

$$\mathbf{T}^{(2)} = -p\mathbf{C}^{-1} + \mathcal{G}(\mathbf{C}, T, \vec{G}), \quad \mathbf{t} = -p\mathbf{I} + \mathcal{F}(\mathbf{F}, T, \vec{G})$$