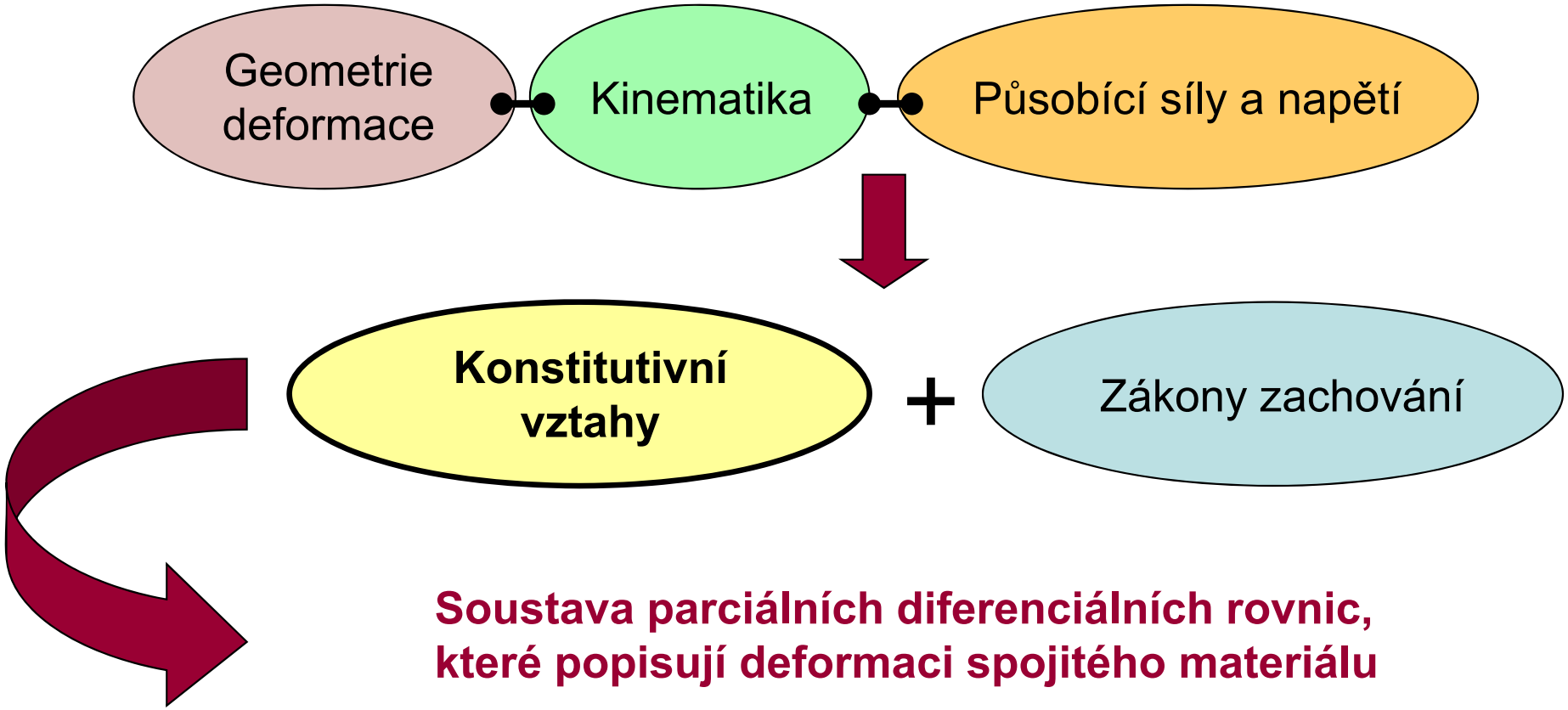
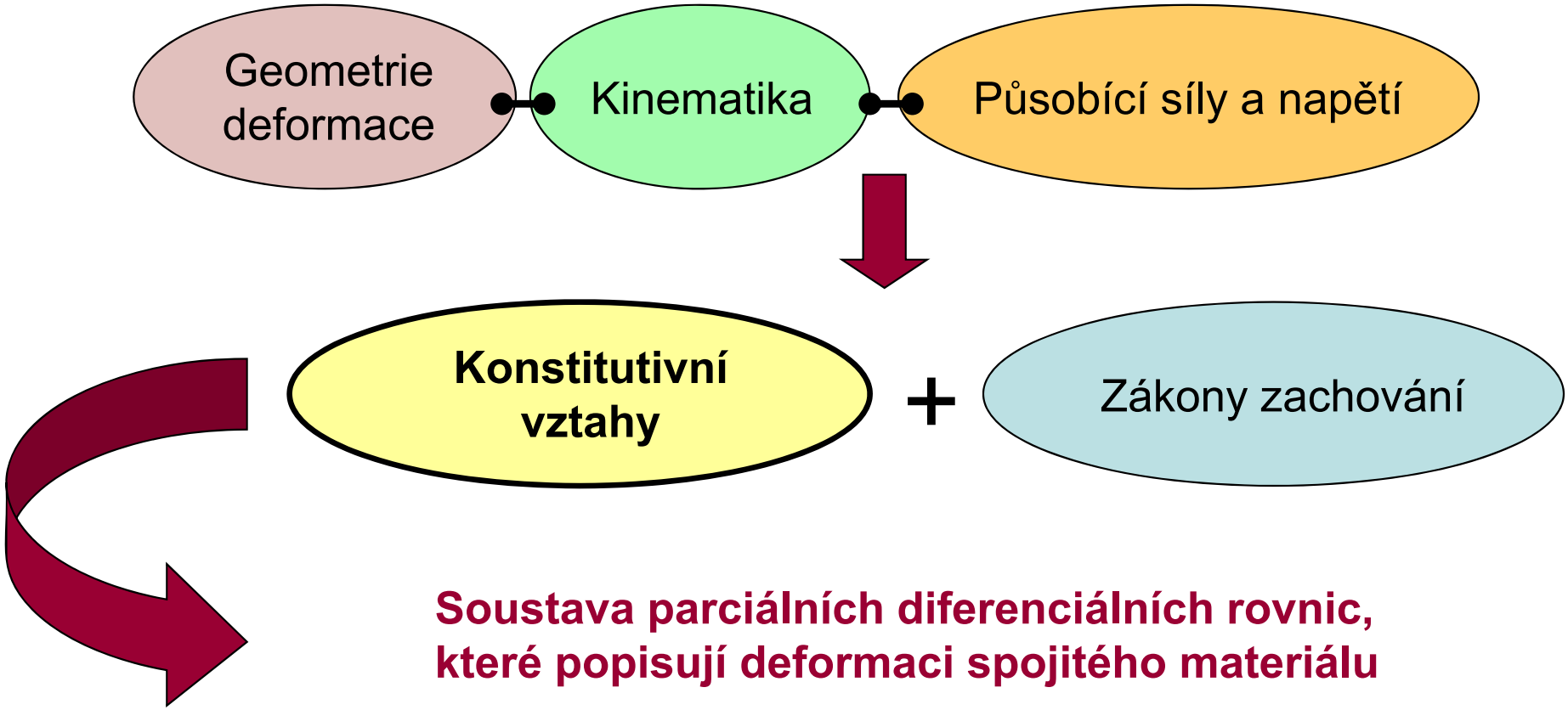
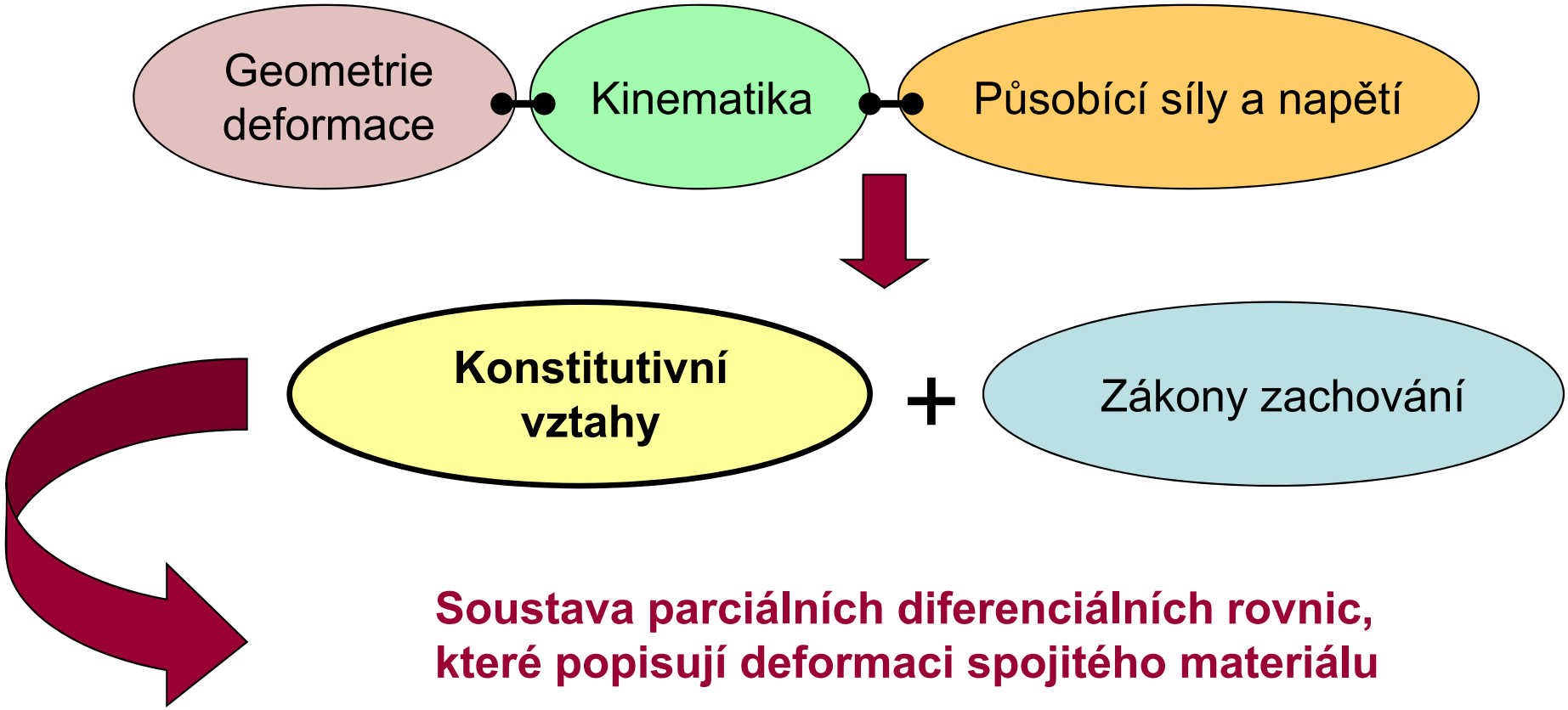
# *Mechanika kontinua – část 8*
# *Konstitutivní vztahy I*


Geometrie deformace
Kinematika
Působící síly a napětí
Konstitutivní vztahy
+
Zákony zachování
Soustava parciálních diferenciálních rovnic,
které popisují deformaci spojitého materiálu




**Soustava parciálních diferenciálních rovnic, které popisují deformaci spojitého materiálu**

- Požadavky, které musí splňovat konstitutivní vztahy: deterministický princip – objektivita – termodynamická kompatibilita
- Koncept objektivity
- Kinematická podmínka
- Materiálové symetrie, homogenní a izotropní materiály
- Termodynamická kompatibilita – použití Clausius-Duhemovy nerovnosti




- Požadavky, které musí splňovat konstitutivní vztahy: deterministický princip – objektivita – termodynamická kompatibilita
- Koncept objektivity
- Kinematická podmínka
- Materiálové symetrie, homogenní a izotropní materiály
- Termodynamická kompatibilita – použití Clausius-Duhemovy nerovnosti

## Konstitutivní vztahy – základní principy

**Deterministický princip:**

Aktuální stav termomechanických proměnných v čase $t$ v materiálovém bodě $\vec{X}$ je obecně určen teplotní a deformační historií materiálových bodů tělesa v čase $\tau \leq t$. Chování materiálu nezávisí na bodech vně tělesa a dějích, které se uskuteční v budoucnosti.

**Materiálová objektivita:**

Tvar konstitutivních vztahů je invariantní vůči k pohybu referenční soustavy. Jinými slovy, materiálové vlastnosti nesmí záviset na stanovišti pozorovatele.

**Termodynamická kompatibilita:**

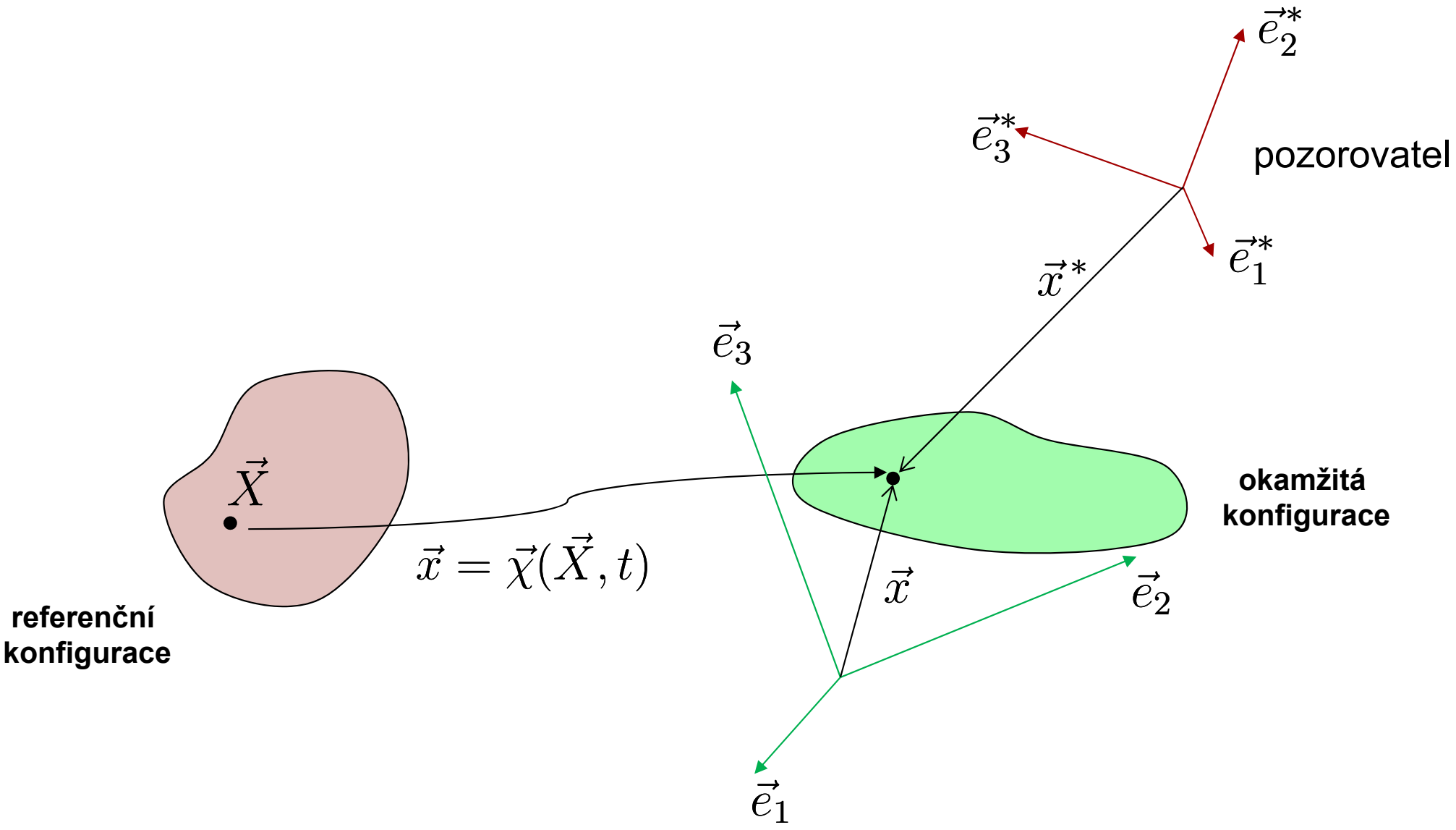
Materiálové vztahy musí být kompatibilní s druhou větou termodynamiky, tj. systém musí v každém okamžiku splňovat Clausius-Duhemovu nerovnost.

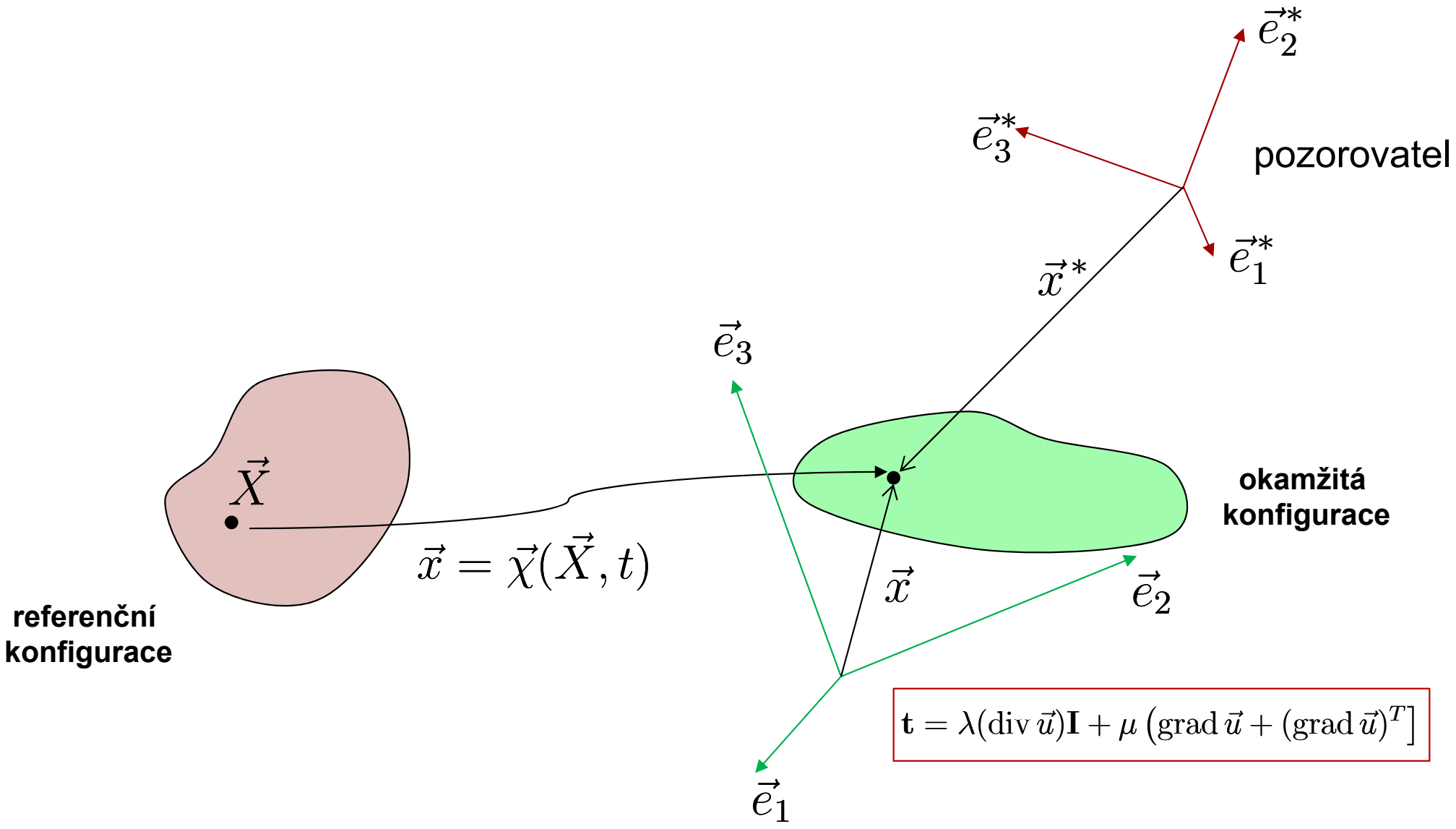
Objektivní veličiny jsou takové, které jsou invariantní vůči Euklidově transformaci (*rigid transformation*):

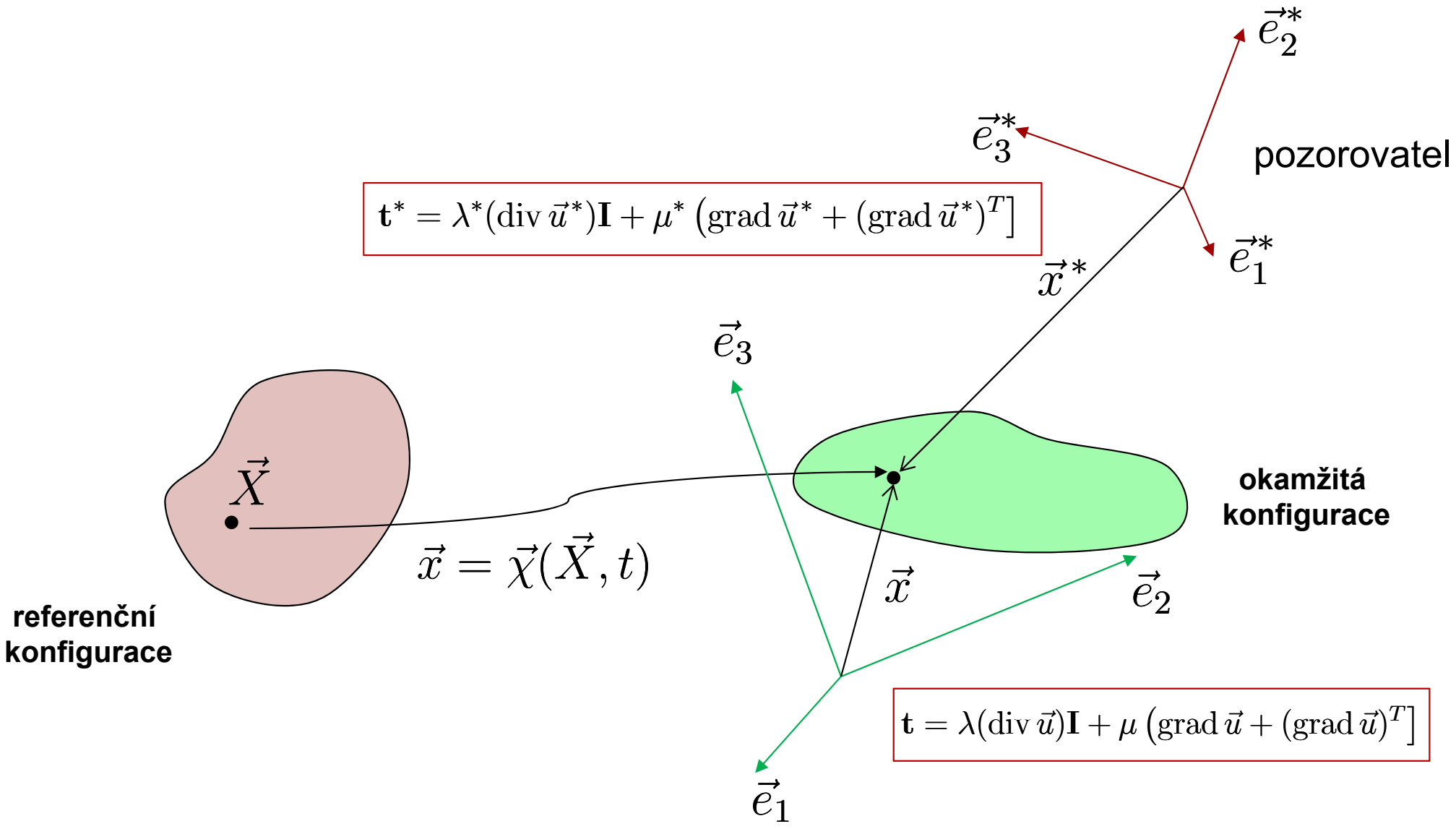
Skalár: $\psi^* = \psi$

Vektor: $\vec{a}^* = \mathbf{O}(t) \cdot \vec{a}$

Tenzor: $\mathbf{A}^* = \mathbf{O}(t) \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}}(t)$


$\vec{e}_2^*$
$\vec{e}_3^*$
pozorovatel
$\vec{e}_1^*$
$\vec{x}^*$
$\vec{e}_3$
$\vec{X}$
okamžitá konfigurace
$\vec{x} = \vec{\chi}(\vec{X}, t)$
$\vec{x}$
$\vec{e}_2$
referenční konfigurace
$\vec{e}_1$


$\vec{e}_2^*$
$\vec{e}_3^*$
pozorovatel
$\vec{e}_1^*$
$\vec{x}^*$
$\vec{e}_3$
$\vec{X}$
okamžitá konfigurace
$\vec{x} = \vec{\chi}(\vec{X}, t)$
$\vec{x}$
$\vec{e}_2$
referenční konfigurace
$\mathbf{t} = \lambda(\mathrm{div}\,\vec{u})\mathbf{I} + \mu\left(\mathrm{grad}\,\vec{u} + (\mathrm{grad}\,\vec{u})^T\right]$
$\vec{e}_1$


$\vec{e}_2^*$
$\vec{e}_3^*$
pozorovatel
$\vec{e}_1^*$
$\mathbf{t}^* = \lambda^*(\operatorname{div}\vec{u}^*)\mathbf{I} + \mu^*\left(\operatorname{grad}\vec{u}^* + (\operatorname{grad}\vec{u}^*)^T\right]$
$\vec{x}^*$
$\vec{e}_3$
$\vec{X}$
okamžitá konfigurace
$\vec{x} = \vec{\chi}(\vec{X}, t)$
$\vec{x}$
$\vec{e}_2$
referenční konfigurace
$\mathbf{t} = \lambda(\operatorname{div}\vec{u})\mathbf{I} + \mu\left(\operatorname{grad}\vec{u} + (\operatorname{grad}\vec{u})^T\right]$
$\vec{e}_1$

## Pohybující se pozorovatel

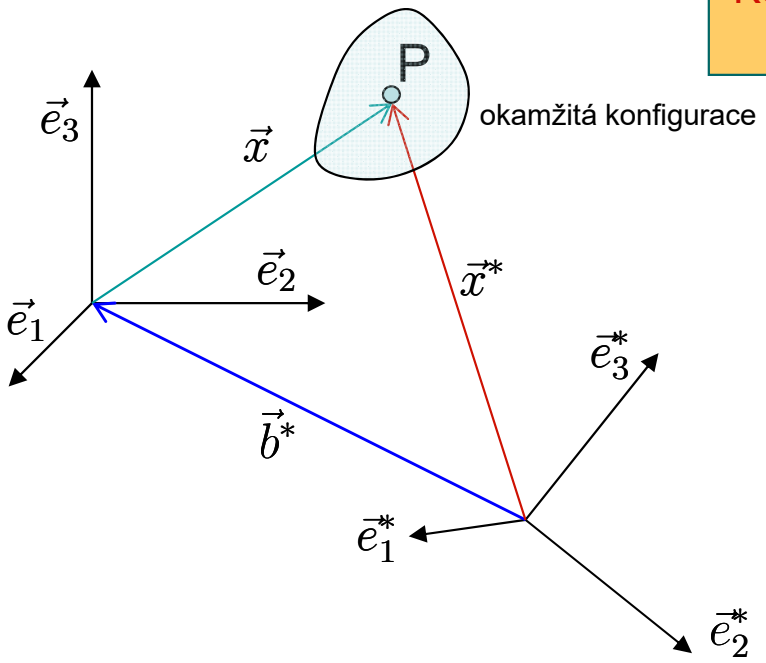
Uvažujme eukleidovskou transformaci

$$\vec{x}^* = \mathbf{O}(t) \cdot \vec{x} + \vec{b}^*(t),$$

kde $\mathbf{O}$ je ortogonální matice,

$$\mathbf{O} \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}} = \mathbf{O}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{O} = \mathbf{I}.$$

$\mathbf{O}$ i $\vec{b}^*$ mohou záviset na čase.



# Pohybující se pozorovatel

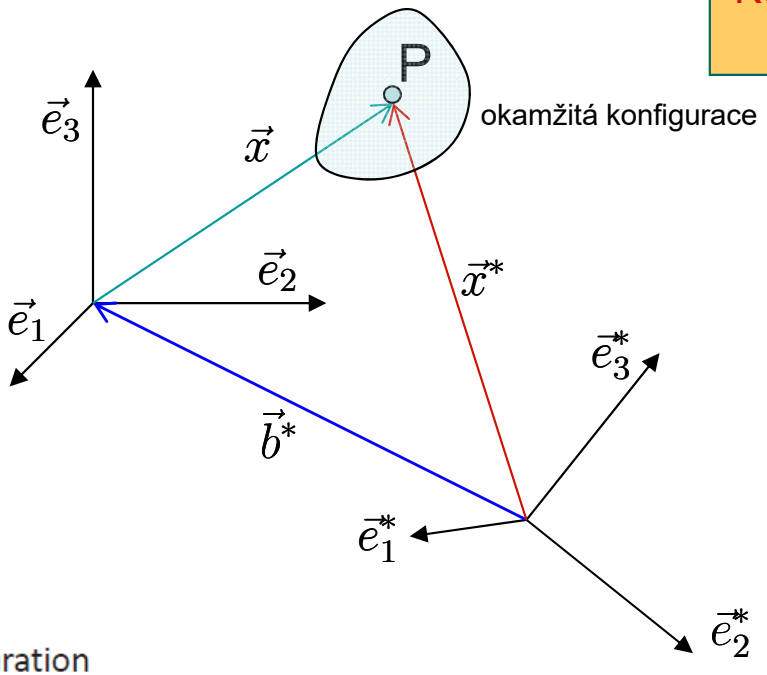
Uvažujme eukleidovskou transformaci

$$\vec{x}^* = \mathbf{O}(t) \cdot \vec{x} + \vec{b}^*(t),$$

kde $\mathbf{O}$ je ortogonální matice,

$$\mathbf{O} \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}} = \mathbf{O}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{O} = \mathbf{I}.$$

$\mathbf{O}$ i $\vec{b}^*$ mohou záviset na čase.



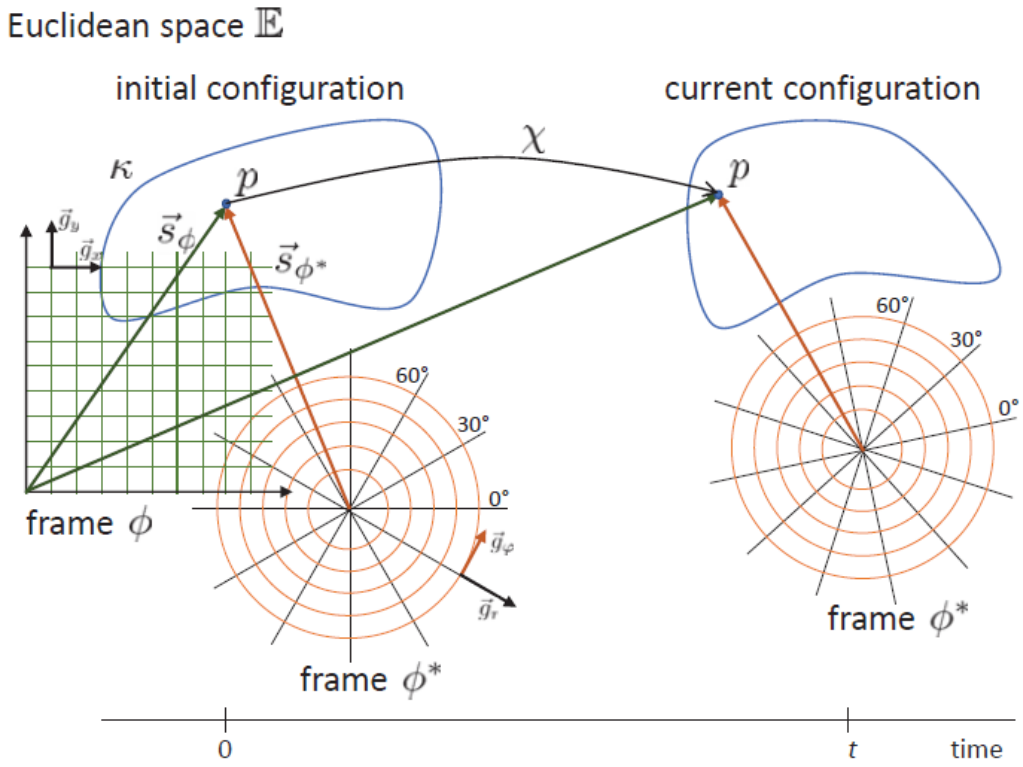




Figure 1.2: Position of particle $p$ at times 0 and $t$, as viewed from fixed Cartesian frame $\phi: \mathbb{E} \to \mathbb{R}^3$ and from moving polar frame $\phi^*: \mathbb{E} \times [0, \infty) \to \mathbb{R}^3$.

Konstitutivní vztahy 2

## Pohybující se pozorovatel

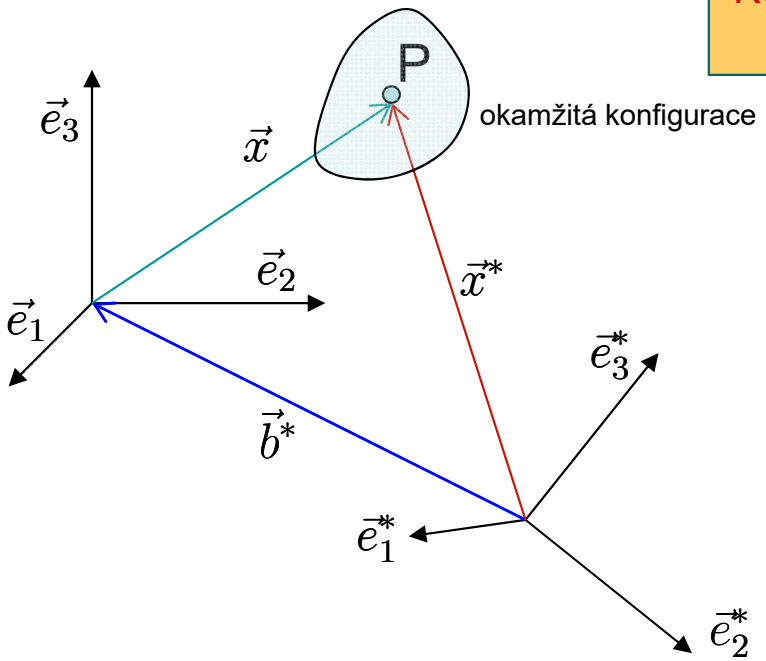
Uvažujme eukleidovskou transformaci

$$\vec{x}^* = \mathbf{O}(t) \cdot \vec{x} + \vec{b}^*(t),$$

kde $\mathbf{O}$ je ortogonální matice,

$$\mathbf{O} \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}} = \mathbf{O}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{O} = \mathbf{I}.$$

$\mathbf{O}$ i $\vec{b}^*$ mohou záviset na čase.




Tuto transformaci můžeme chápat jako změnu stanoviště pozorovatele. Veličinu charakterizujeme jako *objektivní*, pokud se při změně stanoviště pozorovatele nezmění.

Skalár: $\psi^* = \psi$

Vektor: $\vec{a}^* = \mathbf{O}(t) \cdot \vec{a}$

Tenzor: $\mathbf{A}^* = \mathbf{O}(t) \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}}(t)$

Týká se veličin v okamžité konfiguraci!

# Pohybující se pozorovatel

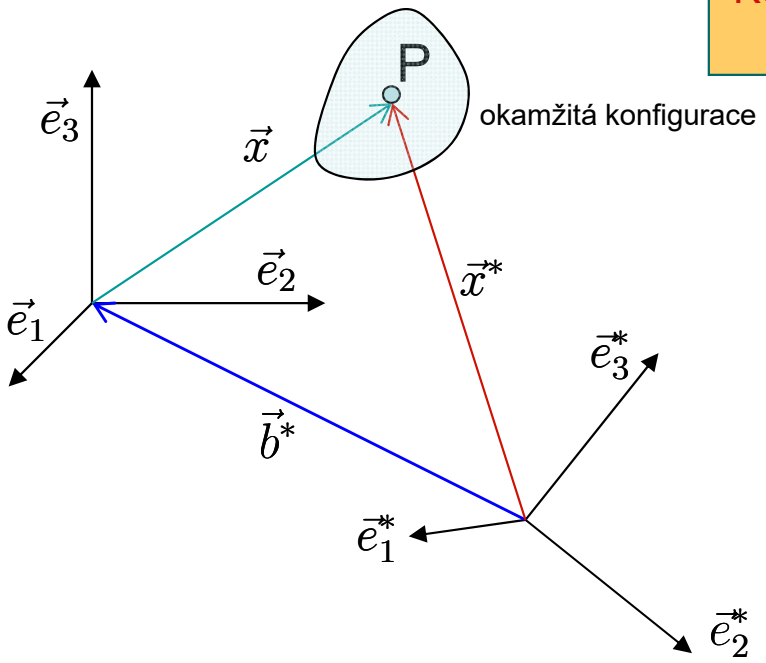
Uvažujme eukleidovskou transformaci

$$\vec{x}^* = \mathbf{O}(t) \cdot \vec{x} + \vec{b}^*(t),$$

kde $\mathbf{O}$ je ortogonální matice,

$$\mathbf{O} \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}} = \mathbf{O}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{O} = \mathbf{I}.$$

$\mathbf{O}$ i $\vec{b}^*$ mohou záviset na čase.




Tuto transformaci můžeme chápat jako změnu stanoviště pozorovatele. Veličinu charakterizujeme jako *objektivní*, pokud se při změně stanoviště pozorovatele nezmění.

Skalár: $\psi^* = \psi$

Vektor: $\vec{a}^* = \mathbf{O}(t) \cdot \vec{a}$

Tenzor: $\mathbf{A}^* = \mathbf{O}(t) \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}}(t)$

Týká se veličin v okamžité konfiguraci!

S pomocí zobrazení $\vec{\chi}$ můžeme transformaci zapsat jako $\vec{\chi}^*(\vec{X}, t) = \mathbf{O}(t) \cdot \vec{\chi}(\vec{X}, t) + \vec{b}^*(t).$

Zderivováním podle času dostaneme

rychlost: $\vec{v}^*(\vec{x}^*, t) = \mathbf{O}(t) \cdot \vec{v}(\vec{x}, t) + \dot{\mathbf{O}}(t) \cdot \vec{x} + \dot{\vec{b}}^*(t)$

zrychlení: $\vec{a}^*(\vec{x}^*, t) = \mathbf{O}(t) \cdot \vec{a}(\vec{x}, t) + 2\dot{\mathbf{O}}(t) \cdot \vec{v}(\vec{x}, t) + \ddot{\mathbf{O}}(t) \cdot \vec{x} + \ddot{\vec{b}}^*(t)$

# Rychlost a zrychlení při změně stanoviště pozorovatele

Zaveďme tenzor úhlové rychlosti $\boldsymbol{\Omega}(t) := \dot{\mathbf{O}}(t) \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}}(t).$

Snadno se přesvědčíme, že $\boldsymbol{\Omega}$ je skutečně antisymetrický tenzor:

$$\boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\Omega}^{\mathbf{T}} = \dot{\mathbf{O}} \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}} + (\dot{\mathbf{O}} \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}})^{\mathbf{T}} = \dot{\mathbf{O}} \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}} + \mathbf{O} \cdot \dot{\mathbf{O}}^{\mathbf{T}} = (\mathbf{O} \cdot \dot{\mathbf{O}}^{\mathbf{T}}) = \dot{\mathbf{I}} = \mathbf{0}$$

Podobným způsoben lze dokázat, že platí: $\dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\Omega} = \ddot{\mathbf{O}} \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}}$

# Rychlost a zrychlení při změně stanoviště pozorovatele

Konstitutivní vztahy 3

Zaveďme tenzor úhlové rychlosti $\boldsymbol{\Omega}(t) := \dot{\mathbf{O}}(t) \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}}(t).$

Snadno se přesvědčíme, že $\boldsymbol{\Omega}$ je skutečně antisymetrický tenzor:

$$\boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\Omega}^{\mathbf{T}} = \dot{\mathbf{O}} \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}} + (\dot{\mathbf{O}} \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}})^{\mathbf{T}} = \dot{\mathbf{O}} \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}} + \mathbf{O} \cdot \dot{\mathbf{O}}^{\mathbf{T}} = (\mathbf{O} \cdot \dot{\mathbf{O}}^{\mathbf{T}}) = \dot{\mathbf{I}} = \mathbf{0}$$

Podobným způsoben lze dokázat, že platí: $\dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\Omega} = \ddot{\mathbf{O}} \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}}$

Vztahy pro rychlost a zrychlení lze pak vyjádřit následovně:

$$\vec{v}^* = \mathbf{O} \cdot \vec{v} + \dot{\mathbf{O}} \cdot \vec{x} + \dot{\vec{b}}^* = \mathbf{O} \cdot \vec{v} + \dot{\mathbf{O}} \cdot \left[\mathbf{O}^T \cdot (\vec{x}^* - \vec{b}^*)\right] + \dot{\vec{b}}^* = \mathbf{O} \cdot \vec{v} + \boldsymbol{\Omega} \cdot (\vec{x}^* - \vec{b}^*) + \dot{\vec{b}}^*$$

$$\vec{a}^* = \mathbf{O}(t) \cdot \vec{a} + \underbrace{2\boldsymbol{\Omega} \cdot (\vec{v}^* - \dot{\vec{b}}^*)}_{\text{Coriolisovo zrychlení}} - \underbrace{\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\Omega} \cdot (\vec{x}^* - \vec{b}^*)}_{\text{odstředivé zrychlení}} + \underbrace{\dot{\boldsymbol{\Omega}} \cdot (\vec{x}^* - \vec{b}^*)}_{\text{Eulerovo zrychlení}} + \ddot{\vec{b}}^*$$

$$\vec{x^*} = \mathbf{O}(t) \cdot \vec{x} + \vec{b^*}(t),$$

$$\vec{v^*}(\vec{x^*}, t) = \mathbf{O}(t) \cdot \vec{v}(\vec{x}, t) + \dot{\mathbf{O}}(t) \cdot \vec{x} + \dot{\vec{b}}^*(t)$$

$$\vec{a^*}(\vec{x^*}, t) = \mathbf{O}(t) \cdot \vec{a}(\vec{x}, t) + 2\dot{\mathbf{O}}(t) \cdot \vec{v}(\vec{x}, t) + \ddot{\mathbf{O}}(t) \cdot \vec{x} + \ddot{\vec{b}}^*(t)$$

$$\mathbf{\Omega}(t) := \dot{\mathbf{O}}(t) \cdot \mathbf{O^T}(t).$$

$$\vec{x^*} = \mathbf{O}(t) \cdot \vec{x} + \vec{b^*}(t) \quad \rightarrow \quad \vec{x} = \mathbf{O}^T \cdot (\vec{x^*} - \vec{b^*})$$

$$\vec{x}^* = \mathbf{O}(t) \cdot \vec{x} + \vec{b}^*(t),$$

$$\vec{v}^*(\vec{x}^*, t) = \mathbf{O}(t) \cdot \vec{v}(\vec{x}, t) + \dot{\mathbf{O}}(t) \cdot \vec{x} + \dot{\vec{b}}^*(t)$$

$$\vec{a}^*(\vec{x}^*, t) = \mathbf{O}(t) \cdot \vec{a}(\vec{x}, t) + 2\dot{\mathbf{O}}(t) \cdot \vec{v}(\vec{x}, t) + \ddot{\mathbf{O}}(t) \cdot \vec{x} + \ddot{\vec{b}}^*(t)$$

$$\boldsymbol{\Omega}(t) := \dot{\mathbf{O}}(t) \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}}(t).$$

$$\vec{x}^* = \mathbf{O}(t) \cdot \vec{x} + \vec{b}^*(t) \quad \rightarrow \quad \vec{x} = \mathbf{O}^T \cdot (\vec{x}^* - \vec{b}^*)$$

$$\vec{v}^* = \ \mathbf{O} \cdot \vec{v} + \dot{\mathbf{O}} \cdot \vec{x} + \dot{\vec{b}}^* = \mathbf{O} \cdot \vec{v} + \dot{\mathbf{O}} \cdot \left[ \mathbf{O}^T \cdot (\vec{x}^* - \vec{b}^*) \right] + \dot{\vec{b}}^* = \mathbf{O} \cdot \vec{v} + \boldsymbol{\Omega} \cdot (\vec{x}^* - \vec{b}^*) + \dot{\vec{b}}^*$$

$$\vec{x^*} = \mathbf{O}(t) \cdot \vec{x} + \vec{b^*}(t),$$

$$\vec{v^*}(\vec{x^*}, t) = \mathbf{O}(t) \cdot \vec{v}(\vec{x}, t) + \dot{\mathbf{O}}(t) \cdot \vec{x} + \dot{\vec{b}}^*(t)$$

$$\vec{a^*}(\vec{x^*}, t) = \mathbf{O}(t) \cdot \vec{a}(\vec{x}, t) + 2\dot{\mathbf{O}}(t) \cdot \vec{v}(\vec{x}, t) + \ddot{\mathbf{O}}(t) \cdot \vec{x} + \ddot{\vec{b}}^*(t)$$

$$\boldsymbol{\Omega}(t) := \dot{\mathbf{O}}(t) \cdot \mathbf{O^T}(t).$$

$$\vec{x^*} = \mathbf{O}(t) \cdot \vec{x} + \vec{b^*}(t) \quad \rightarrow \quad \vec{x} = \mathbf{O}^T \cdot (\vec{x^*} - \vec{b^*})$$

$$\vec{v^*} = \ \mathbf{O} \cdot \vec{v} + \dot{\mathbf{O}} \cdot \vec{x} + \dot{\vec{b}}^* = \mathbf{O} \cdot \vec{v} + \dot{\mathbf{O}} \cdot \left[\mathbf{O}^T \cdot (\vec{x^*} - \vec{b^*})\right] + \dot{\vec{b}}^* = \mathbf{O} \cdot \vec{v} + \boldsymbol{\Omega} \cdot (\vec{x^*} - \vec{b^*}) + \dot{\vec{b}}^*$$

$$\vec{a^*}(\vec{x^*}, t) = \mathbf{O}(t) \cdot \vec{a}(\vec{x}, t) + 2\dot{\mathbf{O}}(t) \cdot \vec{v}(\vec{x}, t) + \ddot{\mathbf{O}}(t) \cdot \vec{x} + \ddot{\vec{b}}^*(t)$$

$$\vec{x}^* = \mathbf{O}(t) \cdot \vec{x} + \vec{b}^*(t),$$

$$\vec{v}^*(\vec{x}^*, t) = \mathbf{O}(t) \cdot \vec{v}(\vec{x}, t) + \dot{\mathbf{O}}(t) \cdot \vec{x} + \dot{\vec{b}}^*(t)$$

$$\vec{a}^*(\vec{x}^*, t) = \mathbf{O}(t) \cdot \vec{a}(\vec{x}, t) + 2\dot{\mathbf{O}}(t) \cdot \vec{v}(\vec{x}, t) + \ddot{\mathbf{O}}(t) \cdot \vec{x} + \ddot{\vec{b}}^*(t)$$

$$\boldsymbol{\Omega}(t) := \dot{\mathbf{O}}(t) \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}}(t).$$

$$\vec{x}^* = \mathbf{O}(t) \cdot \vec{x} + \vec{b}^*(t) \quad \rightarrow \quad \vec{x} = \mathbf{O}^T \cdot (\vec{x}^* - \vec{b}^*)$$

$$\vec{v}^* = \ \mathbf{O} \cdot \vec{v} + \dot{\mathbf{O}} \cdot \vec{x} + \dot{\vec{b}}^* = \mathbf{O} \cdot \vec{v} + \dot{\mathbf{O}} \cdot \left[ \mathbf{O}^T \cdot (\vec{x}^* - \vec{b}^*) \right] + \dot{\vec{b}}^* = \mathbf{O} \cdot \vec{v} + \boldsymbol{\Omega} \cdot (\vec{x}^* - \vec{b}^*) + \dot{\vec{b}}^*$$

$$\vec{a}^*(\vec{x}^*, t) = \mathbf{O}(t) \cdot \vec{a}(\vec{x}, t) + 2\dot{\mathbf{O}}(t) \cdot \vec{v}(\vec{x}, t) + \ddot{\mathbf{O}}(t) \cdot \vec{x} + \ddot{\vec{b}}^*(t)$$

$$\vec{v}^* = \mathbf{O} \cdot \vec{v} + \boldsymbol{\Omega} \cdot (\vec{x}^* - \vec{b}^*) + \dot{\vec{b}}^* \quad \rightarrow \quad \vec{v} = \mathbf{O}^T \cdot (\vec{v}^* - \boldsymbol{\Omega} \cdot (\vec{x}^* - \vec{b}^*) - \dot{\vec{b}}^*)$$

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\Omega} = \ddot{\mathbf{O}} \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}}$$

$$\vec{x}^* = \mathbf{O}(t) \cdot \vec{x} + \vec{b}^*(t),$$

$$\vec{v}^*(\vec{x}^*, t) = \mathbf{O}(t) \cdot \vec{v}(\vec{x}, t) + \dot{\mathbf{O}}(t) \cdot \vec{x} + \dot{\vec{b}}^*(t)$$

$$\vec{a}^*(\vec{x}^*, t) = \mathbf{O}(t) \cdot \vec{a}(\vec{x}, t) + 2\dot{\mathbf{O}}(t) \cdot \vec{v}(\vec{x}, t) + \ddot{\mathbf{O}}(t) \cdot \vec{x} + \ddot{\vec{b}}^*(t)$$

$$\boldsymbol{\Omega}(t) := \dot{\mathbf{O}}(t) \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}}(t).$$

$$\vec{x}^* = \mathbf{O}(t) \cdot \vec{x} + \vec{b}^*(t) \quad \rightarrow \quad \vec{x} = \mathbf{O}^T \cdot (\vec{x}^* - \vec{b}^*)$$

$$\vec{v}^* = \ \mathbf{O} \cdot \vec{v} + \dot{\mathbf{O}} \cdot \vec{x} + \dot{\vec{b}}^* = \mathbf{O} \cdot \vec{v} + \dot{\mathbf{O}} \cdot \left[\mathbf{O}^T \cdot (\vec{x}^* - \vec{b}^*)\right] + \dot{\vec{b}}^* = \mathbf{O} \cdot \vec{v} + \boldsymbol{\Omega} \cdot (\vec{x}^* - \vec{b}^*) + \dot{\vec{b}}^*$$

$$\vec{a}^*(\vec{x}^*, t) = \mathbf{O}(t) \cdot \vec{a}(\vec{x}, t) + 2\dot{\mathbf{O}}(t) \cdot \vec{v}(\vec{x}, t) + \ddot{\mathbf{O}}(t) \cdot \vec{x} + \ddot{\vec{b}}^*(t)$$

$$\vec{v}^* = \mathbf{O} \cdot \vec{v} + \boldsymbol{\Omega} \cdot (\vec{x}^* - \vec{b}^*) + \dot{\vec{b}}^* \quad \rightarrow \quad \vec{v} = \mathbf{O}^T \cdot (\vec{v}^* - \boldsymbol{\Omega} \cdot (\vec{x}^* - \vec{b}^*) - \dot{\vec{b}}^*)$$

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\Omega} = \ddot{\mathbf{O}} \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}}$$

$$\vec{a}^* = \mathbf{O}(t) \cdot \vec{a} + 2\boldsymbol{\Omega} \cdot (\vec{v}^* - \dot{\vec{b}}^*) - \boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\Omega} \cdot (\vec{x}^* - \vec{b}^*) + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \cdot (\vec{x}^* - \vec{b}^*) + \ddot{\vec{b}}^*$$

# Rychlost a zrychlení při změně stanoviště pozorovatele

Konstitutivní vztahy 3

Zaveďme tenzor úhlové rychlosti $\boldsymbol{\Omega}(t) := \dot{\mathbf{O}}(t) \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}}(t).$

Snadno se přesvědčíme, že $\boldsymbol{\Omega}$ je skutečně antisymetrický tenzor:

$$\boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\Omega}^{\mathbf{T}} = \dot{\mathbf{O}} \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}} + (\dot{\mathbf{O}} \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}})^{\mathbf{T}} = \dot{\mathbf{O}} \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}} + \mathbf{O} \cdot \dot{\mathbf{O}}^{\mathbf{T}} = (\mathbf{O} \cdot \dot{\mathbf{O}}^{\mathbf{T}}) = \dot{\mathbf{I}} = \mathbf{0}$$

Podobným způsoben lze dokázat, že platí: $\dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\Omega} = \ddot{\mathbf{O}} \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}}$

Vztahy pro rychlost a zrychlení lze pak vyjádřit následovně:

$$\vec{v}^* = \mathbf{O} \cdot \vec{v} + \dot{\mathbf{O}} \cdot \vec{x} + \dot{\vec{b}}^* = \mathbf{O} \cdot \vec{v} + \dot{\mathbf{O}} \cdot \left[\mathbf{O}^T \cdot (\vec{x}^* - \vec{b}^*)\right] + \dot{\vec{b}}^* = \mathbf{O} \cdot \vec{v} + \boldsymbol{\Omega} \cdot (\vec{x}^* - \vec{b}^*) + \dot{\vec{b}}^*$$

$$\vec{a}^* = \mathbf{O}(t) \cdot \vec{a} + \underbrace{2\boldsymbol{\Omega} \cdot (\vec{v}^* - \dot{\vec{b}}^*)}_{\text{Coriolisovo zrychlení}} - \underbrace{\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\Omega} \cdot (\vec{x}^* - \vec{b}^*)}_{\text{odstředivé zrychlení}} + \underbrace{\dot{\boldsymbol{\Omega}} \cdot (\vec{x}^* - \vec{b}^*)}_{\text{Eulerovo zrychlení}} + \ddot{\vec{b}}^*$$

# Rychlost a zrychlení při změně stanoviště pozorovatele

Konstitutivní vztahy 3

Zaveďme tenzor úhlové rychlosti $\boldsymbol{\Omega}(t) := \dot{\mathbf{O}}(t) \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}}(t).$

Snadno se přesvědčíme, že $\boldsymbol{\Omega}$ je skutečně antisymetrický tenzor:

$$\boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\Omega}^{\mathbf{T}} = \dot{\mathbf{O}} \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}} + (\dot{\mathbf{O}} \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}})^{\mathbf{T}} = \dot{\mathbf{O}} \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}} + \mathbf{O} \cdot \dot{\mathbf{O}}^{\mathbf{T}} = (\mathbf{O} \cdot \dot{\mathbf{O}}^{\mathbf{T}}) = \dot{\mathbf{I}} = \mathbf{0}$$

Podobným způsoben lze dokázat, že platí: $\dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\Omega} = \ddot{\mathbf{O}} \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}}$

Vztahy pro rychlost a zrychlení lze pak vyjádřit následovně:

$$\vec{v}^* = \mathbf{O} \cdot \vec{v} + \dot{\mathbf{O}} \cdot \vec{x} + \dot{\vec{b}}^* = \mathbf{O} \cdot \vec{v} + \dot{\mathbf{O}} \cdot \left[\mathbf{O}^T \cdot (\vec{x}^* - \vec{b}^*)\right] + \dot{\vec{b}}^* = \mathbf{O} \cdot \vec{v} + \boldsymbol{\Omega} \cdot (\vec{x}^* - \vec{b}^*) + \dot{\vec{b}}^*$$

$$\vec{a}^* = \mathbf{O}(t) \cdot \vec{a} + \underbrace{2\boldsymbol{\Omega} \cdot (\vec{v}^* - \dot{\vec{b}}^*)}_{\text{Coriolisovo zrychlení}} - \underbrace{\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\Omega} \cdot (\vec{x}^* - \vec{b}^*)}_{\text{odstředivé zrychlení}} + \underbrace{\dot{\boldsymbol{\Omega}} \cdot (\vec{x}^* - \vec{b}^*)}_{\text{Eulerovo zrychlení}} + \ddot{\vec{b}}^*$$

Najděme nyní transformaci takovou, že se zrychlení transformuje objektivním způsobem.

# Rychlost a zrychlení při změně stanoviště pozorovatele

Konstitutivní vztahy 3

Zaveďme tenzor úhlové rychlosti $\boldsymbol{\Omega}(t) := \dot{\mathbf{O}}(t) \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}}(t).$

Snadno se přesvědčíme, že $\boldsymbol{\Omega}$ je skutečně antisymetrický tenzor:

$$\boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\Omega}^{\mathbf{T}} = \dot{\mathbf{O}} \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}} + (\dot{\mathbf{O}} \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}})^{\mathbf{T}} = \dot{\mathbf{O}} \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}} + \mathbf{O} \cdot \dot{\mathbf{O}}^{\mathbf{T}} = (\mathbf{O} \cdot \dot{\mathbf{O}}^{\mathbf{T}}) = \dot{\mathbf{I}} = \mathbf{0}$$

Podobným způsoben lze dokázat, že platí: $\dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\Omega} = \ddot{\mathbf{O}} \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}}$

Vztahy pro rychlost a zrychlení lze pak vyjádřit následovně:

$$\vec{v}^* = \mathbf{O} \cdot \vec{v} + \dot{\mathbf{O}} \cdot \vec{x} + \dot{\vec{b}}^* = \mathbf{O} \cdot \vec{v} + \dot{\mathbf{O}} \cdot \left[\mathbf{O}^T \cdot (\vec{x}^* - \vec{b}^*)\right] + \dot{\vec{b}}^* = \mathbf{O} \cdot \vec{v} + \boldsymbol{\Omega} \cdot (\vec{x}^* - \vec{b}^*) + \dot{\vec{b}}^*$$

$$\vec{a}^* = \mathbf{O}(t) \cdot \vec{a} + \underbrace{2\boldsymbol{\Omega} \cdot (\vec{v}^* - \dot{\vec{b}}^*)}_{\text{Coriolisovo zrychlení}} - \underbrace{\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\Omega} \cdot (\vec{x}^* - \vec{b}^*)}_{\text{odstředivé zrychlení}} + \underbrace{\dot{\boldsymbol{\Omega}} \cdot (\vec{x}^* - \vec{b}^*)}_{\text{Eulerovo zrychlení}} + \ddot{\vec{b}}^*$$

Najděme nyní transformaci takovou, že se zrychlení transformuje objektivním způsobem.

$$\vec{a}^* = \mathbf{O}(t) \cdot \vec{a} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\Omega} = \mathbf{0},\ \ddot{\vec{b}}^* = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{b}^* = \underbrace{\vec{V}t + \vec{b}_0^*, \quad \mathbf{O}(t) = \mathbf{O}}_{\text{konstanty}}$$

# Rychlost a zrychlení při změně stanoviště pozorovatele

Konstitutivní vztahy 3

Zaveďme tenzor úhlové rychlosti $\boldsymbol{\Omega}(t) := \dot{\mathbf{O}}(t) \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}}(t).$

Snadno se přesvědčíme, že $\boldsymbol{\Omega}$ je skutečně antisymetrický tenzor:

$$\boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\Omega}^{\mathbf{T}} = \dot{\mathbf{O}} \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}} + (\dot{\mathbf{O}} \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}})^{\mathbf{T}} = \dot{\mathbf{O}} \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}} + \mathbf{O} \cdot \dot{\mathbf{O}}^{\mathbf{T}} = (\mathbf{O} \cdot \dot{\mathbf{O}}^{\mathbf{T}}) = \dot{\mathbf{I}} = \mathbf{0}$$

Podobným způsoben lze dokázat, že platí: $\dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\Omega} = \ddot{\mathbf{O}} \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}}$

Vztahy pro rychlost a zrychlení lze pak vyjádřit následovně:

$$\vec{v}^* = \mathbf{O} \cdot \vec{v} + \dot{\mathbf{O}} \cdot \vec{x} + \dot{\vec{b}}^* = \mathbf{O} \cdot \vec{v} + \dot{\mathbf{O}} \cdot \left[\mathbf{O}^T \cdot (\vec{x}^* - \vec{b}^*)\right] + \dot{\vec{b}}^* = \mathbf{O} \cdot \vec{v} + \boldsymbol{\Omega} \cdot (\vec{x}^* - \vec{b}^*) + \dot{\vec{b}}^*$$

$$\vec{a}^* = \mathbf{O}(t) \cdot \vec{a} + \underbrace{2\boldsymbol{\Omega} \cdot (\vec{v}^* - \dot{\vec{b}}^*)}_{\text{Coriolisovo zrychlení}} - \underbrace{\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\Omega} \cdot (\vec{x}^* - \vec{b}^*)}_{\text{odstředivé zrychlení}} + \underbrace{\dot{\boldsymbol{\Omega}} \cdot (\vec{x}^* - \vec{b}^*)}_{\text{Eulerovo zrychlení}} + \ddot{\vec{b}}^*$$

Najděme nyní transformaci takovou, že se zrychlení transformuje objektivním způsobem.

$$\vec{a}^* = \mathbf{O}(t) \cdot \vec{a} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\Omega} = \mathbf{0},\ \ddot{\vec{b}}^* = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{b}^* = \underbrace{\vec{V}t + \vec{b}_0^*, \quad \mathbf{O}(t) = \mathbf{O}}_{\text{konstanty}}$$

Galileovská transformace $\vec{x}^* = \mathbf{O} \cdot \vec{x} + \vec{V}t + \vec{b}_0^*$

# Rychlost a zrychlení při změně stanoviště pozorovatele

Zaveďme tenzor úhlové rychlosti $\boldsymbol{\Omega}(t) := \dot{\mathbf{O}}(t) \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}}(t).$

Snadno se přesvědčíme, že $\boldsymbol{\Omega}$ je skutečně antisymetrický tenzor:

$$\boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\Omega}^{\mathbf{T}} = \dot{\mathbf{O}} \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}} + (\dot{\mathbf{O}} \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}})^{\mathbf{T}} = \dot{\mathbf{O}} \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}} + \mathbf{O} \cdot \dot{\mathbf{O}}^{\mathbf{T}} = (\mathbf{O} \cdot \dot{\mathbf{O}}^{\mathbf{T}}) = \dot{\mathbf{I}} = \mathbf{0}$$

Podobným způsoben lze dokázat, že platí: $\dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\Omega} = \ddot{\mathbf{O}} \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}}$

Vztahy pro rychlost a zrychlení lze pak vyjádřit následovně:

$$\vec{v}^* = \mathbf{O} \cdot \vec{v} + \dot{\mathbf{O}} \cdot \vec{x} + \dot{\vec{b}}^* = \mathbf{O} \cdot \vec{v} + \dot{\mathbf{O}} \cdot \left[\mathbf{O}^T \cdot (\vec{x}^* - \vec{b}^*)\right] + \dot{\vec{b}}^* = \mathbf{O} \cdot \vec{v} + \boldsymbol{\Omega} \cdot (\vec{x}^* - \vec{b}^*) + \dot{\vec{b}}^*$$

$$\vec{a}^* = \mathbf{O}(t) \cdot \vec{a} + \underbrace{2\boldsymbol{\Omega} \cdot (\vec{v}^* - \dot{\vec{b}}^*)}_{\text{Coriolisovo zrychlení}} - \underbrace{\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\Omega} \cdot (\vec{x}^* - \vec{b}^*)}_{\text{odstředivé zrychlení}} + \underbrace{\dot{\boldsymbol{\Omega}} \cdot (\vec{x}^* - \vec{b}^*)}_{\text{Eulerovo zrychlení}} + \ddot{\vec{b}}^*$$

Najděme nyní transformaci takovou, že se zrychlení transformuje objektivním způsobem.

$$\vec{a}^* = \mathbf{O}(t) \cdot \vec{a} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\Omega} = \mathbf{0},\ \ddot{\vec{b}}^* = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{b}^* = \underbrace{\vec{V}t + \vec{b}_0^*, \quad \mathbf{O}(t) = \mathbf{O}}_{\text{konstanty}}$$

Galileovská transformace $\vec{x}^* = \mathbf{O} \cdot \vec{x} + \vec{V}t + \vec{b}_0^*$

Vzhledem ke galileovské transformaci je zrychlení objektivní, ale rychlost zjevně objektivní není:

$$\vec{v}^* = \mathbf{O} \cdot \vec{v} + \vec{V}$$

# Objektivita některých kinematických objektů



Ukažme, že divergence rychlosti je objektivní.

$$\mathrm{div}^* \vec{v}^* = \frac{\partial v_k^*}{\partial x_k^*}$$

# Objektivita některých kinematických objektů

Ukažme, že divergence rychlosti je objektivní.

$$\mathrm{div}^*\vec{v}^* = \frac{\partial v_k^*}{\partial x_k^*} = \frac{\partial}{\partial x_k^*}\left[\mathbf{O}\cdot\vec{v} + \boldsymbol{\Omega}\cdot(\vec{x}^* - \vec{b}^*) + \dot{\vec{b}}^*\right]_k$$

# Objektivita některých kinematických objektů



Ukažme, že divergence rychlosti je objektivní.

$$\mathrm{div}^*\vec{v}^* = \frac{\partial v_k^*}{\partial x_k^*} = \frac{\partial}{\partial x_k^*}\left[\mathbf{O}\cdot\vec{v} + \mathbf{\Omega}\cdot(\vec{x}^* - \vec{b}^*) + \dot{\vec{b}}^*\right]_k = \frac{\partial}{\partial x_k^*}\left[O_{kl}v_l + \Omega_{kl}(x_l^* - b_l^*) + \dot{b}_k^*\right] =$$

# Objektivita některých kinematických objektů



Ukažme, že divergence rychlosti je objektivní.

$$\mathrm{div}^*\vec{v}^* = \frac{\partial v_k^*}{\partial x_k^*} = \frac{\partial}{\partial x_k^*}\left[\mathbf{O}\cdot\vec{v} + \mathbf{\Omega}\cdot(\vec{x}^* - \vec{b}^*) + \dot{\vec{b}}^*\right]_k = \frac{\partial}{\partial x_k^*}\left[O_{kl}v_l + \Omega_{kl}(x_l^* - b_l^*) + \dot{b}_k^*\right] =$$

$$= O_{kl}\frac{\partial v_l}{\partial x_k^*} + \Omega_{kl}\frac{\partial x_l^*}{\partial x_k^*}$$

# Objektivita některých kinematických objektů



Ukažme, že divergence rychlosti je objektivní.

$$\mathrm{div}^*\vec{v}^* = \frac{\partial v_k^*}{\partial x_k^*} = \frac{\partial}{\partial x_k^*}\left[\mathbf{O}\cdot\vec{v} + \mathbf{\Omega}\cdot(\vec{x}^* - \vec{b}^*) + \dot{\vec{b}}^*\right]_k = \frac{\partial}{\partial x_k^*}\left[O_{kl}v_l + \Omega_{kl}(x_l^* - b_l^*) + \dot{b}_k^*\right] =$$

$$= O_{kl}\frac{\partial v_l}{\partial x_k^*} + \Omega_{kl}\frac{\partial x_l^*}{\partial x_k^*} = O_{kl}\frac{\partial v_l}{\partial x_k^*} + \Omega_{kk}$$

# Objektivita některých kinematických objektů



Ukažme, že divergence rychlosti je objektivní.

$$\mathrm{div}^*\vec{v}^* = \frac{\partial v_k^*}{\partial x_k^*} = \frac{\partial}{\partial x_k^*}\left[\mathbf{O}\cdot\vec{v} + \mathbf{\Omega}\cdot(\vec{x}^* - \vec{b}^*) + \dot{\vec{b}}^*\right]_k = \frac{\partial}{\partial x_k^*}\left[O_{kl}v_l + \Omega_{kl}(x_l^* - b_l^*) + \dot{b}_k^*\right] =$$

$$= O_{kl}\frac{\partial v_l}{\partial x_k^*} + \Omega_{kl}\frac{\partial x_l^*}{\partial x_k^*} = O_{kl}\frac{\partial v_l}{\partial x_k^*} + \Omega_{kk} = O_{kl}\frac{\partial v_l}{\partial x_k^*}$$

# Objektivita některých kinematických objektů



Ukažme, že divergence rychlosti je objektivní.

$$\mathrm{div}^*\vec{v}^* = \frac{\partial v_k^*}{\partial x_k^*} = \frac{\partial}{\partial x_k^*}\left[\mathbf{O}\cdot\vec{v} + \mathbf{\Omega}\cdot(\vec{x}^* - \vec{b}^*) + \dot{\vec{b}}^*\right]_k = \frac{\partial}{\partial x_k^*}\left[O_{kl}v_l + \Omega_{kl}(x_l^* - b_l^*) + \dot{b}_k^*\right] =$$

$$= O_{kl}\frac{\partial v_l}{\partial x_k^*} + \Omega_{kl}\frac{\partial x_l^*}{\partial x_k^*} = O_{kl}\frac{\partial v_l}{\partial x_k^*} + \Omega_{kk} = O_{kl}\frac{\partial v_l}{\partial x_k^*} = O_{kl}\frac{\partial v_l}{\partial x_m}\frac{\partial x_m}{\partial x_k^*}$$

# Objektivita některých kinematických objektů



Ukažme, že divergence rychlosti je objektivní.

$$\mathrm{div}^*\vec{v}^* = \frac{\partial v_k^*}{\partial x_k^*} = \frac{\partial}{\partial x_k^*}\left[\mathbf{O}\cdot\vec{v} + \mathbf{\Omega}\cdot(\vec{x}^* - \vec{b}^*) + \dot{\vec{b}}^*\right]_k = \frac{\partial}{\partial x_k^*}\left[O_{kl}v_l + \Omega_{kl}(x_l^* - b_l^*) + \dot{b}_k^*\right] =$$

$$= O_{kl}\frac{\partial v_l}{\partial x_k^*} + \Omega_{kl}\frac{\partial x_l^*}{\partial x_k^*} = O_{kl}\frac{\partial v_l}{\partial x_k^*} + \Omega_{kk} = O_{kl}\frac{\partial v_l}{\partial x_k^*} = O_{kl}\frac{\partial v_l}{\partial x_m}\frac{\partial x_m}{\partial x_k^*}$$

$$\vec{x}^* = \mathbf{O}(t)\cdot\vec{x} + \vec{b}^*(t) \quad \rightarrow \boxed{\vec{x} = \mathbf{O}^T\cdot(\vec{x}^* - \vec{b}^*)}$$

# Objektivita některých kinematických objektů



Ukažme, že divergence rychlosti je objektivní.

$$\mathrm{div}^*\vec{v}^* = \frac{\partial v_k^*}{\partial x_k^*} = \frac{\partial}{\partial x_k^*}\left[\mathbf{O}\cdot\vec{v} + \mathbf{\Omega}\cdot(\vec{x}^* - \vec{b}^*) + \dot{\vec{b}}^*\right]_k = \frac{\partial}{\partial x_k^*}\left[O_{kl}v_l + \Omega_{kl}(x_l^* - b_l^*) + \dot{b}_k^*\right] =$$

$$= O_{kl}\frac{\partial v_l}{\partial x_k^*} + \Omega_{kl}\frac{\partial x_l^*}{\partial x_k^*} = O_{kl}\frac{\partial v_l}{\partial x_k^*} + \Omega_{kk} = O_{kl}\frac{\partial v_l}{\partial x_k^*} = O_{kl}\frac{\partial v_l}{\partial x_m}\frac{\partial x_m}{\partial x_k^*} = O_{kl}\frac{\partial v_l}{\partial x_m}O_{km}$$

# Objektivita některých kinematických objektů



Ukažme, že divergence rychlosti je objektivní.

$$\mathrm{div}^*\vec{v}^* = \frac{\partial v_k^*}{\partial x_k^*} = \frac{\partial}{\partial x_k^*}\left[\mathbf{O}\cdot\vec{v} + \mathbf{\Omega}\cdot(\vec{x}^* - \vec{b}^*) + \dot{\vec{b}}^*\right]_k = \frac{\partial}{\partial x_k^*}\left[O_{kl}v_l + \Omega_{kl}(x_l^* - b_l^*) + \dot{b}_k^*\right] =$$

$$= O_{kl}\frac{\partial v_l}{\partial x_k^*} + \Omega_{kl}\frac{\partial x_l^*}{\partial x_k^*} = O_{kl}\frac{\partial v_l}{\partial x_k^*} + \Omega_{kk} = O_{kl}\frac{\partial v_l}{\partial x_k^*} = O_{kl}\frac{\partial v_l}{\partial x_m}\frac{\partial x_m}{\partial x_k^*} = O_{kl}\frac{\partial v_l}{\partial x_m}O_{km} = \delta_{lm}\frac{\partial v_l}{\partial x_m}$$

# Objektivita některých kinematických objektů



Ukažme, že divergence rychlosti je objektivní.

$$\mathrm{div}^*\vec{v}^* = \frac{\partial v_k^*}{\partial x_k^*} = \frac{\partial}{\partial x_k^*}\left[\mathbf{O}\cdot\vec{v} + \mathbf{\Omega}\cdot(\vec{x}^* - \vec{b}^*) + \dot{\vec{b}}^*\right]_k = \frac{\partial}{\partial x_k^*}\left[O_{kl}v_l + \Omega_{kl}(x_l^* - b_l^*) + \dot{b}_k^*\right] =$$

$$= O_{kl}\frac{\partial v_l}{\partial x_k^*} + \Omega_{kl}\frac{\partial x_l^*}{\partial x_k^*} = O_{kl}\frac{\partial v_l}{\partial x_k^*} + \Omega_{kk} = O_{kl}\frac{\partial v_l}{\partial x_k^*} = O_{kl}\frac{\partial v_l}{\partial x_m}\frac{\partial x_m}{\partial x_k^*} = O_{kl}\frac{\partial v_l}{\partial x_m}O_{km} = \delta_{lm}\frac{\partial v_l}{\partial x_m} = \frac{\partial v_l}{\partial x_l} = \mathrm{div}\,\vec{v}$$

# Objektivita některých kinematických objektů



Ukažme, že divergence rychlosti je objektivní.

$$\mathrm{div}^*\vec{v}^* = \frac{\partial v_k^*}{\partial x_k^*} = \frac{\partial}{\partial x_k^*}\left[\mathbf{O}\cdot\vec{v} + \mathbf{\Omega}\cdot(\vec{x}^* - \vec{b}^*) + \dot{\vec{b}}^*\right]_k = \frac{\partial}{\partial x_k^*}\left[O_{kl}v_l + \Omega_{kl}(x_l^* - b_l^*) + \dot{b}_k^*\right] =$$

$$= O_{kl}\frac{\partial v_l}{\partial x_k^*} + \Omega_{kl}\frac{\partial x_l^*}{\partial x_k^*} = O_{kl}\frac{\partial v_l}{\partial x_k^*} + \Omega_{kk} = O_{kl}\frac{\partial v_l}{\partial x_k^*} = O_{kl}\frac{\partial v_l}{\partial x_m}\frac{\partial x_m}{\partial x_k^*} = O_{kl}\frac{\partial v_l}{\partial x_m}O_{km} = \delta_{lm}\frac{\partial v_l}{\partial x_m} = \frac{\partial v_l}{\partial x_l} = \mathrm{div}\,\vec{v}$$

Analogicky lze dokázat, že

- gradient objektivního skaláru je objektivní vektor,
- divergence objektivního vektoru je objektivní skalár,
- divergence objektivního tenzoru je objektivní vektor.

# Objektivita některých kinematických objektů



Ukažme, že divergence rychlosti je objektivní.

$$\mathrm{div}^*\vec{v}^* = \frac{\partial v_k^*}{\partial x_k^*} = \frac{\partial}{\partial x_k^*}\left[\mathbf{O}\cdot\vec{v} + \mathbf{\Omega}\cdot(\vec{x}^* - \vec{b}^*) + \dot{\vec{b}}^*\right]_k = \frac{\partial}{\partial x_k^*}\left[O_{kl}v_l + \Omega_{kl}(x_l^* - b_l^*) + \dot{b}_k^*\right] =$$

$$= O_{kl}\frac{\partial v_l}{\partial x_k^*} + \Omega_{kl}\frac{\partial x_l^*}{\partial x_k^*} = O_{kl}\frac{\partial v_l}{\partial x_k^*} + \Omega_{kk} = O_{kl}\frac{\partial v_l}{\partial x_k^*} = O_{kl}\frac{\partial v_l}{\partial x_m}\frac{\partial x_m}{\partial x_k^*} = O_{kl}\frac{\partial v_l}{\partial x_m}O_{km} = \delta_{lm}\frac{\partial v_l}{\partial x_m} = \frac{\partial v_l}{\partial x_l} = \mathrm{div}\,\vec{v}$$

Analogicky lze dokázat, že

- gradient objektivního skaláru je objektivní vektor,
- divergence objektivního vektoru je objektivní skalár,
- divergence objektivního tenzoru je objektivní vektor.

Dále lze ukázat, že platí $\mathbf{F}^*(\vec{X},t) = \mathbf{O}(t)\cdot\mathbf{F}(\vec{X},t)$.

Odvození: $F_{kK}^* = \frac{\partial \chi_k^*}{\partial X_K} = \frac{\partial}{\partial X_K}(O_{kl}\chi_l + b_k^*) = O_{kl}\frac{\partial \chi_l}{\partial X_K} = O_{kl}F_{lK}$

# Objektivita některých kinematických objektů



Ukažme, že divergence rychlosti je objektivní.

$$\mathrm{div}^*\vec{v}^* = \frac{\partial v_k^*}{\partial x_k^*} = \frac{\partial}{\partial x_k^*}\left[\mathbf{O}\cdot\vec{v} + \mathbf{\Omega}\cdot(\vec{x}^* - \vec{b}^*) + \dot{\vec{b}}^*\right]_k = \frac{\partial}{\partial x_k^*}\left[O_{kl}v_l + \Omega_{kl}(x_l^* - b_l^*) + \dot{b}_k^*\right] =$$

$$= O_{kl}\frac{\partial v_l}{\partial x_k^*} + \Omega_{kl}\frac{\partial x_l^*}{\partial x_k^*} = O_{kl}\frac{\partial v_l}{\partial x_k^*} + \Omega_{kk} = O_{kl}\frac{\partial v_l}{\partial x_k^*} = O_{kl}\frac{\partial v_l}{\partial x_m}\frac{\partial x_m}{\partial x_k^*} = O_{kl}\frac{\partial v_l}{\partial x_m}O_{km} = \delta_{lm}\frac{\partial v_l}{\partial x_m} = \frac{\partial v_l}{\partial x_l} = \mathrm{div}\,\vec{v}$$

Analogicky lze dokázat, že

- gradient objektivního skaláru je objektivní vektor,
- divergence objektivního vektoru je objektivní skalár,
- divergence objektivního tenzoru je objektivní vektor.

Dále lze ukázat, že platí $\mathbf{F}^*(\vec{X},t) = \mathbf{O}(t)\cdot\mathbf{F}(\vec{X},t)$.

smíšený tenzor: $\mathbf{F}^*(t) = \mathbf{O}(t)\cdot\mathbf{F}(t)\cdot\mathbf{O}^T(0)$

Odvození: $F_{kK}^* = \frac{\partial \chi_k^*}{\partial X_K} = \frac{\partial}{\partial X_K}(O_{kl}\chi_l + b_k^*) = O_{kl}\frac{\partial \chi_l}{\partial X_K} = O_{kl}F_{lK}$

# Objektivita některých kinematických objektů



Ukažme, že divergence rychlosti je objektivní.

$$\mathrm{div}^*\vec{v}^* = \frac{\partial v_k^*}{\partial x_k^*} = \frac{\partial}{\partial x_k^*}\left[\mathbf{O}\cdot\vec{v} + \mathbf{\Omega}\cdot(\vec{x}^* - \vec{b}^*) + \dot{\vec{b}}^*\right]_k = \frac{\partial}{\partial x_k^*}\left[O_{kl}v_l + \Omega_{kl}(x_l^* - b_l^*) + \dot{b}_k^*\right] =$$

$$= O_{kl}\frac{\partial v_l}{\partial x_k^*} + \Omega_{kl}\frac{\partial x_l^*}{\partial x_k^*} = O_{kl}\frac{\partial v_l}{\partial x_k^*} + \Omega_{kk} = O_{kl}\frac{\partial v_l}{\partial x_k^*} = O_{kl}\frac{\partial v_l}{\partial x_m}\frac{\partial x_m}{\partial x_k^*} = O_{kl}\frac{\partial v_l}{\partial x_m}O_{km} = \delta_{lm}\frac{\partial v_l}{\partial x_m} = \frac{\partial v_l}{\partial x_l} = \mathrm{div}\,\vec{v}$$

Analogicky lze dokázat, že

- gradient objektivního skaláru je objektivní vektor,
- divergence objektivního vektoru je objektivní skalár,
- divergence objektivního tenzoru je objektivní vektor.

Dále lze ukázat, že platí $\mathbf{F}^*(\vec{X},t) = \mathbf{O}(t)\cdot\mathbf{F}(\vec{X},t)$.

Odvození: $F_{kK}^* = \frac{\partial \chi_k^*}{\partial X_K} = \frac{\partial}{\partial X_K}(O_{kl}\chi_l + b_k^*) = O_{kl}\frac{\partial \chi_l}{\partial X_K} = O_{kl}F_{lK}$

S pomocí těchto vztahů lze snadno ukázat, že dříve zavedené objekty $J$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{b}$ a $\mathbf{d}$ mají následující transformační vlastnosti:

$$J^* = J, \quad \mathbf{C}^* = \mathbf{C}, \quad \mathbf{U}^* = \mathbf{U}$$

$$\mathbf{R}^* = \mathbf{O}(t)\cdot\mathbf{R}$$

$$\mathbf{V}^* = \mathbf{O}(t)\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{O}^{\mathbf{T}}(t), \quad \mathbf{b}^* = \mathbf{O}(t)\cdot\mathbf{b}\cdot\mathbf{O}^{\mathbf{T}}(t), \quad \mathbf{d}^* = \mathbf{O}(t)\cdot\mathbf{d}\cdot\mathbf{O}^{\mathbf{T}}(t),$$

# Objektivita některých kinematických objektů



Ukažme, že divergence rychlosti je objektivní.

$$\mathrm{div}^*\vec{v}^* = \frac{\partial v_k^*}{\partial x_k^*} = \frac{\partial}{\partial x_k^*}\left[\mathbf{O}\cdot\vec{v} + \mathbf{\Omega}\cdot(\vec{x}^* - \vec{b}^*) + \dot{\vec{b}}^*\right]_k = \frac{\partial}{\partial x_k^*}\left[O_{kl}v_l + \Omega_{kl}(x_l^* - b_l^*) + \dot{b}_k^*\right] =$$

$$= O_{kl}\frac{\partial v_l}{\partial x_k^*} + \Omega_{kl}\frac{\partial x_l^*}{\partial x_k^*} = O_{kl}\frac{\partial v_l}{\partial x_k^*} + \Omega_{kk} = O_{kl}\frac{\partial v_l}{\partial x_k^*} = O_{kl}\frac{\partial v_l}{\partial x_m}\frac{\partial x_m}{\partial x_k^*} = O_{kl}\frac{\partial v_l}{\partial x_m}O_{km} = \delta_{lm}\frac{\partial v_l}{\partial x_m} = \frac{\partial v_l}{\partial x_l} = \mathrm{div}\,\vec{v}$$

Analogicky lze dokázat, že

- gradient objektivního skaláru je objektivní vektor,
- divergence objektivního vektoru je objektivní skalár,
- divergence objektivního tenzoru je objektivní vektor.

Dále lze ukázat, že platí $\mathbf{F}^*(\vec{X},t) = \mathbf{O}(t)\cdot\mathbf{F}(\vec{X},t)$.

Odvození: $F_{kK}^* = \frac{\partial \chi_k^*}{\partial X_K} = \frac{\partial}{\partial X_K}(O_{kl}\chi_l + b_k^*) = O_{kl}\frac{\partial \chi_l}{\partial X_K} = O_{kl}F_{lK}$

S pomocí těchto vztahů lze snadno ukázat, že dříve zavedené objekty $J$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{b}$ a $\mathbf{d}$ mají následující transformační vlastnosti:

$$J^* = J, \quad \mathbf{C}^* = \mathbf{C}, \quad \mathbf{U}^* = \mathbf{U}$$

$$\mathbf{R}^* = \mathbf{O}(t)\cdot\mathbf{R}$$

$$\mathbf{V}^* = \mathbf{O}(t)\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{O}^{\mathbf{T}}(t), \quad \mathbf{b}^* = \mathbf{O}(t)\cdot\mathbf{b}\cdot\mathbf{O}^{\mathbf{T}}(t), \quad \mathbf{d}^* = \mathbf{O}(t)\cdot\mathbf{d}\cdot\mathbf{O}^{\mathbf{T}}(t),$$

Naopak gradient rychlosti není objektivní tenzor:

$$\boldsymbol{l}^* = \mathbf{O}(t)\cdot\boldsymbol{l}\cdot\mathbf{O}^{\mathbf{T}}(t) + \mathbf{\Omega}(t)$$

# Objektivita zákonů zachování



Objektivita má tři úrovně:

- objektivita kinematických veličin
- postulát objektivity některých veličin a objektů,
- princip objektivity konstitutivních vztahů.

# Objektivita zákonů zachování



Objektivita má tři úrovně:

- objektivita kinematických veličin
- postulát objektivity některých veličin a objektů,
- princip objektivity konstitutivních vztahů.

**Příklad**: Za jakých podmínek je druhý Newtonův zákon objektivní?

$$m\ddot{\vec{x}} = \vec{F}$$

# Objektivita zákonů zachování



Objektivita má tři úrovně:

- objektivita kinematických veličin
- postulát objektivity některých veličin a objektů,
- princip objektivity konstitutivních vztahů.

**Příklad**: Za jakých podmínek je druhý Newtonův zákon objektivní?

$$m\ddot{\vec{x}} = \vec{F}$$

Pokud by byl zákon objektivní, pak by mělo platit $m\left(\mathbf{O}\cdot\ddot{\vec{x}}\right) = \mathbf{O}\cdot\vec{F}$. Avšak (viz str. 3)

# Objektivita zákonů zachování



Objektivita má tři úrovně:

- objektivita kinematických veličin
- postulát objektivity některých veličin a objektů,
- princip objektivity konstitutivních vztahů.

**Příklad**: Za jakých podmínek je druhý Newtonův zákon objektivní?

$$m\ddot{\vec{x}} = \vec{F}$$

Pokud by byl zákon objektivní, pak by mělo platit $m\left(\mathbf{O}\cdot\ddot{\vec{x}}\right) = \mathbf{O}\cdot\vec{F}$. Avšak (viz str. 3)

$$\ddot{\vec{x}}^{*} = \mathbf{O}(t)\cdot\ddot{\vec{x}} + 2\boldsymbol{\Omega}\cdot(\dot{\vec{v}}^{*} - \dot{\vec{b}}^{*}) - \boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{\Omega}\cdot(\vec{x}^{*} - \vec{b}^{*}) + \dot{\boldsymbol{\Omega}}\cdot(\vec{x}^{*} - \vec{b}^{*}) + \ddot{\vec{b}}^{*}$$

# Objektivita zákonů zachování



Objektivita má tři úrovně:

- objektivita kinematických veličin
- postulát objektivity některých veličin a objektů,
- princip objektivity konstitutivních vztahů.

**Příklad**: Za jakých podmínek je druhý Newtonův zákon objektivní?

$$m\ddot{\vec{x}} = \vec{F}$$

Pokud by byl zákon objektivní, pak by mělo platit $m\left(\mathbf{O}\cdot\ddot{\vec{x}}\right) = \mathbf{O}\cdot\vec{F}$. Avšak (viz str. 3)

$$\ddot{\vec{x}}^{*} = \mathbf{O}(t)\cdot\ddot{\vec{x}} + 2\boldsymbol{\Omega}\cdot(\dot{\vec{v}}^{*} - \dot{\vec{b}}^{*}) - \boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{\Omega}\cdot(\vec{x}^{*} - \vec{b}^{*}) + \dot{\boldsymbol{\Omega}}\cdot(\vec{x}^{*} - \vec{b}^{*}) + \ddot{\vec{b}}^{*}$$

Takže

$$m\ddot{\vec{x}}^{*} = \vec{F}^{*} + m\left(2\boldsymbol{\Omega}\cdot(\dot{\vec{x}}^{*} - \dot{\vec{b}}^{*}) - \boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{\Omega}\cdot(\vec{x}^{*} - \vec{b}^{*}) + \dot{\boldsymbol{\Omega}}\cdot(\vec{x}^{*} - \vec{b}^{*}) + \ddot{\vec{b}}^{*}\right)$$

Druhý Newtonův zákon je objektivní pouze pokud toto můžeme škrtnout, tj. pro Galileovu transformaci.

# Objektivita zákonů zachování



Objektivita má tři úrovně:

- objektivita kinematických veličin
- postulát objektivity některých veličin a objektů,
- princip objektivity konstitutivních vztahů.

**Příklad**: Za jakých podmínek je druhý Newtonův zákon objektivní?

$$m\ddot{\vec{x}} = \vec{F}$$

Pokud by byl zákon objektivní, pak by mělo platit $m\left(\mathbf{O}\cdot\ddot{\vec{x}}\right) = \mathbf{O}\cdot\vec{F}$. Avšak (viz str. 3)

$$\ddot{\vec{x}}^* = \mathbf{O}(t)\cdot\ddot{\vec{x}} + 2\boldsymbol{\Omega}\cdot(\dot{\vec{v}}^* - \dot{\vec{b}}^*) - \boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{\Omega}\cdot(\vec{x}^* - \vec{b}^*) + \dot{\boldsymbol{\Omega}}\cdot(\vec{x}^* - \vec{b}^*) + \ddot{\vec{b}}^*$$

Takže

$$m\ddot{\vec{x}}^* = \vec{F}^* + m\left(2\boldsymbol{\Omega}\cdot(\dot{\vec{x}}^* - \dot{\vec{b}}^*) - \boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{\Omega}\cdot(\vec{x}^* - \vec{b}^*) + \dot{\boldsymbol{\Omega}}\cdot(\vec{x}^* - \vec{b}^*) + \ddot{\vec{b}}^*\right)$$

Druhý Newtonův zákon je objektivní pouze pokud toto můžeme škrtnout, tj. pro Galileovu transformaci.

Povšimněte si, že při odvození jsme mlčky **předpokládali**, že hmotnost a síla jsou objektivní veličiny.

# Objektivita zákonů zachování



Objektivita má tři úrovně:

- objektivita kinematických veličin
- postulát objektivity některých veličin a objektů,
- princip objektivity konstitutivních vztahů.

**Příklad**: Za jakých podmínek je druhý Newtonův zákon objektivní?

$$m\ddot{\vec{x}} = \vec{F}$$

Pokud by byl zákon objektivní, pak by mělo platit $m\left(\mathbf{O}\cdot\ddot{\vec{x}}\right) = \mathbf{O}\cdot\vec{F}$. Avšak (viz str. 3)

$$\ddot{\vec{x}}^* = \mathbf{O}(t)\cdot\ddot{\vec{x}} + 2\boldsymbol{\Omega}\cdot(\dot{\vec{v}}^* - \dot{\vec{b}}^*) - \boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{\Omega}\cdot(\vec{x}^* - \vec{b}^*) + \dot{\boldsymbol{\Omega}}\cdot(\vec{x}^* - \vec{b}^*) + \ddot{\vec{b}}^*$$

Takže

$$m\ddot{\vec{x}}^* = \vec{F}^* + m\left(2\boldsymbol{\Omega}\cdot(\dot{\vec{x}}^* - \dot{\vec{b}}^*) - \boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{\Omega}\cdot(\vec{x}^* - \vec{b}^*) + \dot{\boldsymbol{\Omega}}\cdot(\vec{x}^* - \vec{b}^*) + \ddot{\vec{b}}^*\right)$$

Druhý Newtonův zákon je objektivní pouze pokud toto můžeme škrtnout, tj. pro Galileovu transformaci.

Povšimněte si, že při odvození jsme mlčky **předpokládali**, že hmotnost a síla jsou objektivní veličiny.

**Postulujme**, že hustota $\rho$, vektor napětí $\vec{t}_{(\vec{n})}$, hustota vnitřní energie $\epsilon$ a normálový tepelný tok $h_{(\vec{n})} := \vec{q}\cdot\vec{n}$ jsou objektivní veličiny. Pak lze ukázat, že také tenzor napětí $\mathbf{t}$ a vektor tepelného toku $\vec{q}$ jsou objektivní, gradient teploty $\vec{G}^* = \vec{G}$ a Piola-Kirchhoffův tenzor $\mathbf{T}^{(2)*} = \mathbf{T}^{(2)}$.

# Objektivita zákonů zachování



Objektivita má tři úrovně:

- objektivita kinematických veličin
- postulát objektivity některých veličin a objektů,
- princip objektivity konstitutivních vztahů.

**Příklad**: Za jakých podmínek je druhý Newtonův zákon objektivní?

$$m\ddot{\vec{x}} = \vec{F}$$

Pokud by byl zákon objektivní, pak by mělo platit $m\left(\mathbf{O}\cdot\ddot{\vec{x}}\right) = \mathbf{O}\cdot\vec{F}$. Avšak (viz str. 3)

$$\ddot{\vec{x}}^* = \mathbf{O}(t)\cdot\ddot{\vec{x}} + 2\boldsymbol{\Omega}\cdot(\dot{\vec{v}}^* - \dot{\vec{b}}^*) - \boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{\Omega}\cdot(\vec{x}^* - \vec{b}^*) + \dot{\boldsymbol{\Omega}}\cdot(\vec{x}^* - \vec{b}^*) + \ddot{\vec{b}}^*$$

Takže

$$m\ddot{\vec{x}}^* = \vec{F}^* + m\left(2\boldsymbol{\Omega}\cdot(\dot{\vec{x}}^* - \dot{\vec{b}}^*) - \boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{\Omega}\cdot(\vec{x}^* - \vec{b}^*) + \dot{\boldsymbol{\Omega}}\cdot(\vec{x}^* - \vec{b}^*) + \ddot{\vec{b}}^*\right)$$

Druhý Newtonův zákon je objektivní pouze pokud toto můžeme škrtnout, tj. pro Galileovu transformaci.

Povšimněte si, že při odvození jsme mlčky **předpokládali**, že hmotnost a síla jsou objektivní veličiny.

**Postulujme**, že hustota $\rho$, vektor napětí $\vec{t}_{(\vec{n})}$, hustota vnitřní energie $\epsilon$ a normálový tepelný tok $h_{(\vec{n})} := \vec{q}\cdot\vec{n}$ jsou objektivní veličiny. Pak lze ukázat, že také tenzor napětí $\mathbf{t}$ a vektor tepelného toku $\vec{q}$ jsou objektivní, gradient teploty $\vec{G}^* = \vec{G}$ a Piola-Kirchhoffův tenzor $\mathbf{T}^{(2)*} = \mathbf{T}^{(2)}$.

Důkaz pro napěťový tenzor:

$$\vec{t}^*_{(\vec{n})} = \mathbf{O}\cdot\vec{t}_{(\vec{n})} \overset{\text{Cauchy}}{\longrightarrow} \vec{n}^*\cdot\mathbf{t}^* = \mathbf{O}\cdot(\vec{n}\cdot\mathbf{t}) \overset{\vec{n}\text{ je objektivní}}{=} (\mathbf{O}\cdot\vec{n})\cdot\mathbf{t}^* \rightarrow \vec{n}\cdot\left(\mathbf{O}^{\mathbf{T}}\cdot\mathbf{t}^* - \mathbf{t}\cdot\mathbf{O}^{\mathbf{T}}\right) = \vec{0} \rightarrow \mathbf{t}^* = \mathbf{O}\cdot\mathbf{t}\cdot\mathbf{O}^{\mathbf{T}}$$

$$\vec{t}^{*}_{(\vec{n})} = \mathbf{O} \cdot \vec{t}_{(\vec{n})}$$

$$\vec{n}^{*} \cdot \mathbf{t}^{*} = \mathbf{O} \cdot (\vec{n} \cdot \mathbf{t})$$

$$\vec{t}^{*}_{(\vec{n})} = \mathbf{O} \cdot \vec{t}_{(\vec{n})}$$

$$\vec{n}^{*} \cdot \mathbf{t}^{*} = \mathbf{O} \cdot (\vec{n} \cdot \mathbf{t})$$

$$(\mathbf{O} \cdot \vec{n}) \cdot \mathbf{t}^{*} = \mathbf{O} \cdot (\vec{n} \cdot \mathbf{t})$$

$$(\vec{n} \cdot \mathbf{O}^{T}) \cdot \mathbf{t}^{*} = \vec{n} \cdot \mathbf{t} \cdot \mathbf{O}^{T}$$

$$\vec{t}^{*}_{(\vec{n})} = \mathbf{O} \cdot \vec{t}_{(\vec{n})}$$

$$\vec{n}^{*} \cdot \mathbf{t}^{*} = \mathbf{O} \cdot (\vec{n} \cdot \mathbf{t})$$

$$(\mathbf{O} \cdot \vec{n}) \cdot \mathbf{t}^{*} = \mathbf{O} \cdot (\vec{n} \cdot \mathbf{t})$$

$$(\vec{n} \cdot \mathbf{O}^{T}) \cdot \mathbf{t}^{*} = \vec{n} \cdot \mathbf{t} \cdot \mathbf{O}^{T}$$

$$\vec{n} \cdot \left(\mathbf{O^{T}} \cdot \mathbf{t}^{*} - \mathbf{t} \cdot \mathbf{O^{T}}\right) = \vec{0}$$

$$\mathbf{t}^{*} = \mathbf{O} \cdot \mathbf{t} \cdot \mathbf{O^{T}}$$

# Objektivní materiálová derivace



Uvažujme objektivní vektor a tenzor a spočtěme jejich materiálové derivace.

# Objektivní materiálová derivace



Uvažujme objektivní vektor a tenzor a spočtěme jejich materiálové derivace.

Vektor: $\vec{a}^{*} = \mathbf{O} \cdot \vec{a} \quad \rightarrow \quad \dot{\vec{a}}^{*} = \mathbf{O} \cdot \dot{\vec{a}} + \dot{\mathbf{O}} \cdot \vec{a} = \mathbf{O} \cdot \dot{\vec{a}} + \dot{\mathbf{O}} \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}} \cdot \vec{a}^{*} \quad \rightarrow \quad \boxed{\dot{\vec{a}}^{*} = \mathbf{O} \cdot \dot{\vec{a}} + \boldsymbol{\Omega} \cdot \vec{a}^{*}}$

# Objektivní materiálová derivace



Uvažujme objektivní vektor a tenzor a spočtěme jejich materiálové derivace.

Vektor: $\vec{a}^{*} = \mathbf{O} \cdot \vec{a} \quad \rightarrow \quad \dot{\vec{a}}^{*} = \mathbf{O} \cdot \dot{\vec{a}} + \dot{\mathbf{O}} \cdot \vec{a} = \mathbf{O} \cdot \dot{\vec{a}} + \dot{\mathbf{O}} \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}} \cdot \vec{a}^{*} \quad \rightarrow \quad \boxed{\dot{\vec{a}}^{*} = \mathbf{O} \cdot \dot{\vec{a}} + \boldsymbol{\Omega} \cdot \vec{a}^{*}}$

Tenzor: $\mathbf{A}^{*} = \mathbf{O} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}} \quad \rightarrow \quad \boxed{\dot{\mathbf{A}}^{*} = \mathbf{O} \cdot \dot{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}} + \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{A}^{*} - \mathbf{A}^{*} \cdot \boldsymbol{\Omega}}$

# Objektivní materiálová derivace



Uvažujme objektivní vektor a tenzor a spočtěme jejich materiálové derivace.

Vektor: $\vec{a}^* = \mathbf{O} \cdot \vec{a} \quad \rightarrow \quad \dot{\vec{a}}^* = \mathbf{O} \cdot \dot{\vec{a}} + \dot{\mathbf{O}} \cdot \vec{a} = \mathbf{O} \cdot \dot{\vec{a}} + \dot{\mathbf{O}} \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}} \cdot \vec{a}^* \quad \rightarrow \quad \boxed{\dot{\vec{a}}^* = \mathbf{O} \cdot \dot{\vec{a}} + \boldsymbol{\Omega} \cdot \vec{a}^*}$

Tenzor: $\mathbf{A}^* = \mathbf{O} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}} \quad \rightarrow \quad \boxed{\dot{\mathbf{A}}^* = \mathbf{O} \cdot \dot{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}} + \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{A}^* - \mathbf{A}^* \cdot \boldsymbol{\Omega}}$

Materiálové derivace objektivního vektoru a tenzoru nejsou objektivní, což může působit problémy při formulaci konstitutivních vztahů (viz příklad s Maxwellovou reologií). Britský matematický fyziky James G. Oldroyd (1921-1982) proto zavedl objektivní materiálovou derivaci, definovanou následovně:

# Objektivní materiálová derivace



Uvažujme objektivní vektor a tenzor a spočtěme jejich materiálové derivace.

Vektor: $\vec{a}^* = \mathbf{O}\cdot\vec{a} \quad\rightarrow\quad \dot{\vec{a}}^* = \mathbf{O}\cdot\dot{\vec{a}} + \dot{\mathbf{O}}\cdot\vec{a} = \mathbf{O}\cdot\dot{\vec{a}} + \dot{\mathbf{O}}\cdot\mathbf{O}^{\mathbf{T}}\cdot\vec{a}^* \quad\rightarrow\quad \boxed{\dot{\vec{a}}^* = \mathbf{O}\cdot\dot{\vec{a}} + \boldsymbol{\Omega}\cdot\vec{a}^*}$

Tenzor: $\mathbf{A}^* = \mathbf{O}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{O}^{\mathbf{T}} \quad\rightarrow\quad \boxed{\dot{\mathbf{A}}^* = \mathbf{O}\cdot\dot{\mathbf{A}}\cdot\mathbf{O}^{\mathbf{T}} + \boldsymbol{\Omega}\cdot\mathbf{A}^* - \mathbf{A}^*\cdot\boldsymbol{\Omega}}$

Materiálové derivace objektivního vektoru a tenzoru nejsou objektivní, což může působit problémy při formulaci konstitutivních vztahů (viz příklad s Maxwellovou reologií). Britský matematický fyziky James G. Oldroyd (1921-1982) proto zavedl objektivní materiálovou derivaci, definovanou následovně:

Vektor: $\overset{\nabla}{\vec{a}} = \dot{\vec{a}} - \boldsymbol{l}\cdot\vec{a}$

Tenzor: $\overset{\nabla}{\mathbf{A}} = \dot{\mathbf{A}} - \boldsymbol{l}\cdot\mathbf{A} - \mathbf{A}\cdot\boldsymbol{l}^{\mathbf{T}}$

$\leftarrow$ Oldroydova
neboli
horní kovektivní derivace
(*upper convected derivative*)

# Objektivní materiálová derivace



Uvažujme objektivní vektor a tenzor a spočtěme jejich materiálové derivace.

Vektor: $\vec{a}^{*} = \mathbf{O}\cdot\vec{a} \quad \rightarrow \quad \dot{\vec{a}}^{*} = \mathbf{O}\cdot\dot{\vec{a}} + \dot{\mathbf{O}}\cdot\vec{a} = \mathbf{O}\cdot\dot{\vec{a}} + \dot{\mathbf{O}}\cdot\mathbf{O}^{\mathbf{T}}\cdot\vec{a}^{*} \quad \rightarrow \quad \boxed{\dot{\vec{a}}^{*} = \mathbf{O}\cdot\dot{\vec{a}} + \boldsymbol{\Omega}\cdot\vec{a}^{*}}$

Tenzor: $\mathbf{A}^{*} = \mathbf{O}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{O}^{\mathbf{T}} \quad \rightarrow \quad \boxed{\dot{\mathbf{A}}^{*} = \mathbf{O}\cdot\dot{\mathbf{A}}\cdot\mathbf{O}^{\mathbf{T}} + \boldsymbol{\Omega}\cdot\mathbf{A}^{*} - \mathbf{A}^{*}\cdot\boldsymbol{\Omega}}$

Materiálové derivace objektivního vektoru a tenzoru nejsou objektivní, což může působit problémy při formulaci konstitutivních vztahů (viz příklad s Maxwellovou reologií). Britský matematický fyziky James G. Oldroyd (1921-1982) proto zavedl objektivní materiálovou derivaci, definovanou následovně:

Vektor: $\overset{\nabla}{\vec{a}} = \dot{\vec{a}} - \boldsymbol{l}\cdot\vec{a}$

Tenzor: $\overset{\nabla}{\mathbf{A}} = \dot{\mathbf{A}} - \boldsymbol{l}\cdot\mathbf{A} - \mathbf{A}\cdot\boldsymbol{l}^{\mathbf{T}}$

← Oldroydova
neboli
horní kovektivní derivace
(*upper convected derivative*)

Důkaz objektivity pro vektor:

$$\overset{\nabla}{\vec{a}}^{*} = \dot{\vec{a}}^{*} - \boldsymbol{l}^{*}\cdot\vec{a}^{*} = \mathbf{O}\cdot\dot{\vec{a}} + \dot{\mathbf{O}}\cdot\vec{a} - \left(\mathbf{O}\cdot\boldsymbol{l}\cdot\mathbf{O}^{\mathbf{T}} + \boldsymbol{\Omega}\right)\cdot\mathbf{O}\cdot\vec{a} = \mathbf{O}\cdot\dot{\vec{a}} + \dot{\mathbf{O}}\cdot\vec{a} - \mathbf{O}\cdot\boldsymbol{l}\cdot\mathbf{O}^{\mathbf{T}}\cdot\mathbf{O}\cdot\vec{a} - \boldsymbol{\Omega}\cdot\mathbf{O}\cdot\vec{a} = \mathbf{O}\cdot\left(\dot{\vec{a}} - \boldsymbol{l}\cdot\vec{a}\right) = \mathbf{O}\cdot\overset{\nabla}{\vec{a}}$$

# Objektivní materiálová derivace



Uvažujme objektivní vektor a tenzor a spočtěme jejich materiálové derivace.

Vektor: $\vec{a}^{*} = \mathbf{O}\cdot\vec{a} \quad\rightarrow\quad \dot{\vec{a}}^{*} = \mathbf{O}\cdot\dot{\vec{a}} + \dot{\mathbf{O}}\cdot\vec{a} = \mathbf{O}\cdot\dot{\vec{a}} + \dot{\mathbf{O}}\cdot\mathbf{O}^{\mathbf{T}}\cdot\vec{a}^{*} \quad\rightarrow\quad \boxed{\dot{\vec{a}}^{*} = \mathbf{O}\cdot\dot{\vec{a}} + \boldsymbol{\Omega}\cdot\vec{a}^{*}}$

Tenzor: $\mathbf{A}^{*} = \mathbf{O}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{O}^{\mathbf{T}} \quad\rightarrow\quad \boxed{\dot{\mathbf{A}}^{*} = \mathbf{O}\cdot\dot{\mathbf{A}}\cdot\mathbf{O}^{\mathbf{T}} + \boldsymbol{\Omega}\cdot\mathbf{A}^{*} - \mathbf{A}^{*}\cdot\boldsymbol{\Omega}}$

Materiálové derivace objektivního vektoru a tenzoru nejsou objektivní, což může působit problémy při formulaci konstitutivních vztahů (viz příklad s Maxwellovou reologií). Britský matematický fyziky James G. Oldroyd (1921-1982) proto zavedl objektivní materiálovou derivaci, definovanou následovně:

Vektor: $\overset{\nabla}{\vec{a}} = \dot{\vec{a}} - \boldsymbol{l}\cdot\vec{a}$

Tenzor: $\overset{\nabla}{\mathbf{A}} = \dot{\mathbf{A}} - \boldsymbol{l}\cdot\mathbf{A} - \mathbf{A}\cdot\boldsymbol{l}^{\mathbf{T}}$

← Oldroydova
neboli
horní kovektivní derivace
(*upper convected derivative*)

Důkaz objektivity pro vektor:

$$\overset{\nabla}{\vec{a}}^{*} = \dot{\vec{a}}^{*} - \boldsymbol{l}^{*}\cdot\vec{a}^{*} = \mathbf{O}\cdot\dot{\vec{a}} + \dot{\mathbf{O}}\cdot\vec{a} - \left(\mathbf{O}\cdot\boldsymbol{l}\cdot\mathbf{O}^{\mathbf{T}} + \boldsymbol{\Omega}\right)\cdot\mathbf{O}\cdot\vec{a} = \mathbf{O}\cdot\dot{\vec{a}} + \dot{\mathbf{O}}\cdot\vec{a} - \mathbf{O}\cdot\boldsymbol{l}\cdot\mathbf{O}^{\mathbf{T}}\cdot\mathbf{O}\cdot\vec{a} - \boldsymbol{\Omega}\cdot\mathbf{O}\cdot\vec{a} = \mathbf{O}\cdot\left(\dot{\vec{a}} - \boldsymbol{l}\cdot\vec{a}\right) = \mathbf{O}\cdot\overset{\nabla}{\vec{a}}$$

# Objektivní materiálová derivace

Uvažujme objektivní vektor a tenzor a spočtěme jejich materiálové derivace.

Vektor: $\vec{a}^* = \mathbf{O}\cdot\vec{a} \quad\rightarrow\quad \dot{\vec{a}}^* = \mathbf{O}\cdot\dot{\vec{a}} + \dot{\mathbf{O}}\cdot\vec{a} = \mathbf{O}\cdot\dot{\vec{a}} + \dot{\mathbf{O}}\cdot\mathbf{O}^{\mathbf{T}}\cdot\vec{a}^* \quad\rightarrow\quad \boxed{\dot{\vec{a}}^* = \mathbf{O}\cdot\dot{\vec{a}} + \boldsymbol{\Omega}\cdot\vec{a}^*}$

Tenzor: $\mathbf{A}^* = \mathbf{O}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{O}^{\mathbf{T}} \quad\rightarrow\quad \boxed{\dot{\mathbf{A}}^* = \mathbf{O}\cdot\dot{\mathbf{A}}\cdot\mathbf{O}^{\mathbf{T}} + \boldsymbol{\Omega}\cdot\mathbf{A}^* - \mathbf{A}^*\cdot\boldsymbol{\Omega}}$

Materiálové derivace objektivního vektoru a tenzoru nejsou objektivní, což může působit problémy při formulaci konstitutivních vztahů (viz příklad s Maxwellovou reologií). Britský matematický fyziky James G. Oldroyd (1921-1982) proto zavedl objektivní materiálovou derivaci, definovanou následovně:

Vektor: $\overset{\nabla}{\vec{a}} = \dot{\vec{a}} - \boldsymbol{l}\cdot\vec{a}$

Tenzor: $\overset{\nabla}{\mathbf{A}} = \dot{\mathbf{A}} - \boldsymbol{l}\cdot\mathbf{A} - \mathbf{A}\cdot\boldsymbol{l}^{\mathbf{T}}$

← Oldroydova
neboli
horní kovektivní derivace
(*upper convected derivative*)

Důkaz objektivity pro vektor:

$$\overset{\nabla}{\vec{a}}^* = \dot{\vec{a}}^* - \boldsymbol{l}^*\cdot\vec{a}^* = \mathbf{O}\cdot\dot{\vec{a}} + \dot{\mathbf{O}}\cdot\vec{a} - \left(\mathbf{O}\cdot\boldsymbol{l}\cdot\mathbf{O}^{\mathbf{T}} + \boldsymbol{\Omega}\right)\cdot\mathbf{O}\cdot\vec{a} = \mathbf{O}\cdot\dot{\vec{a}} + \dot{\mathbf{O}}\cdot\vec{a} - \mathbf{O}\cdot\boldsymbol{l}\cdot\mathbf{O}^{\mathbf{T}}\cdot\mathbf{O}\cdot\vec{a} - \boldsymbol{\Omega}\cdot\mathbf{O}\cdot\vec{a} = \mathbf{O}\cdot\left(\dot{\vec{a}} - \boldsymbol{l}\cdot\vec{a}\right) = \mathbf{O}\cdot\overset{\nabla}{\vec{a}}$$

Materiálová derivace není definována jednoznačně. Lze ukázat, že pro libovolný objektivní tenzor je následující derivace objektivní, pokud je parametr $\alpha$ z intervalu <-1,1>:

$$\boxed{\left(\frac{\delta\mathbf{A}}{\delta t}\right)_{\alpha} = \dot{\mathbf{A}} - (\mathbf{w}\cdot\mathbf{A} - \mathbf{A}\cdot\mathbf{w}) + \alpha\,(\mathbf{d}\cdot\mathbf{A} + \mathbf{A}\cdot\mathbf{d})}$$

# Objektivní materiálová derivace



Uvažujme objektivní vektor a tenzor a spočtěme jejich materiálové derivace.

Vektor: $\vec{a}^* = \mathbf{O}\cdot\vec{a} \quad\rightarrow\quad \dot{\vec{a}}^* = \mathbf{O}\cdot\dot{\vec{a}} + \dot{\mathbf{O}}\cdot\vec{a} = \mathbf{O}\cdot\dot{\vec{a}} + \dot{\mathbf{O}}\cdot\mathbf{O}^{\mathbf{T}}\cdot\vec{a}^* \quad\rightarrow\quad \boxed{\dot{\vec{a}}^* = \mathbf{O}\cdot\dot{\vec{a}} + \boldsymbol{\Omega}\cdot\vec{a}^*}$

Tenzor: $\mathbf{A}^* = \mathbf{O}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{O}^{\mathbf{T}} \quad\rightarrow\quad \boxed{\dot{\mathbf{A}}^* = \mathbf{O}\cdot\dot{\mathbf{A}}\cdot\mathbf{O}^{\mathbf{T}} + \boldsymbol{\Omega}\cdot\mathbf{A}^* - \mathbf{A}^*\cdot\boldsymbol{\Omega}}$

Materiálové derivace objektivního vektoru a tenzoru nejsou objektivní, což může působit problémy při formulaci konstitutivních vztahů (viz příklad s Maxwellovou reologií). Britský matematický fyziky James G. Oldroyd (1921-1982) proto zavedl objektivní materiálovou derivaci, definovanou následovně:

Vektor: $\overset{\nabla}{\vec{a}} = \dot{\vec{a}} - \boldsymbol{l}\cdot\vec{a}$

Tenzor: $\overset{\nabla}{\mathbf{A}} = \dot{\mathbf{A}} - \boldsymbol{l}\cdot\mathbf{A} - \mathbf{A}\cdot\boldsymbol{l}^{\mathbf{T}}$

← Oldroydova
neboli
horní kovektivní derivace
(*upper convected derivative*)

Důkaz objektivity pro vektor:

$$\overset{\nabla}{\vec{a}}^* = \dot{\vec{a}}^* - \boldsymbol{l}^*\cdot\vec{a}^* = \mathbf{O}\cdot\dot{\vec{a}} + \dot{\mathbf{O}}\cdot\vec{a} - \left(\mathbf{O}\cdot\boldsymbol{l}\cdot\mathbf{O}^{\mathbf{T}} + \boldsymbol{\Omega}\right)\cdot\mathbf{O}\cdot\vec{a} = \mathbf{O}\cdot\dot{\vec{a}} + \cancel{\dot{\mathbf{O}}\cdot\vec{a}} - \mathbf{O}\cdot\boldsymbol{l}\cdot\underline{\mathbf{O}^{\mathbf{T}}\cdot\mathbf{O}}\cdot\vec{a} - \cancel{\boldsymbol{\Omega}\cdot\mathbf{O}}\cdot\vec{a} = \mathbf{O}\cdot\left(\dot{\vec{a}} - \boldsymbol{l}\cdot\vec{a}\right) = \mathbf{O}\cdot\overset{\nabla}{\vec{a}}$$

Materiálová derivace není definována jednoznačně. Lze ukázat, že pro libovolný objektivní tenzor je následující derivace objektivní, pokud je parametr $\alpha$ z intervalu <-1,1>:

$$\boxed{\left(\frac{\delta\mathbf{A}}{\delta t}\right)_{\alpha} = \dot{\mathbf{A}} - \left(\mathbf{w}\cdot\mathbf{A} - \mathbf{A}\cdot\mathbf{w}\right) + \alpha\left(\mathbf{d}\cdot\mathbf{A} + \mathbf{A}\cdot\mathbf{d}\right)}$$

$\alpha = -1$ ← Oldroydova horní konvektivní derivace

$\alpha = 0$ ← Jaumannova korotační derivace