Příklad 5: Rovnice přenosu tepla pro nestlačitelnou kapalinu

$$\rho\dot{\epsilon} = \mathbf{t} : \mathbf{d} - \operatorname{div}\vec{q} + \rho h$$

← **Zákon zachování energie** (viz Zákony zachování str. 7) vyjádříme ve stavových proměnných teplota - tlak.

Levá strana rovnice:

$$d\epsilon = Td\eta - pdv \quad (dU = TdS - pdV)$$ ← 1. termodynamická věta

$$dv = 0$$ ← nestlačitelná kapalina

$$\rho\dot{\epsilon} = \rho T\dot{\eta}\,, \quad \text{kde} \quad \eta = \eta(p,T)$$ ← chceme vyjádřit zákon zachování energie v proměnných tlak a teplota

$$\rho\dot{\epsilon} = \rho T\dot{\eta} = \underbrace{\rho T\left(\frac{\partial\eta}{\partial T}\right)_p}_{\text{měrné teplo při konstantním tlaku}}\dot{T} + \underbrace{T\rho\left(\frac{\partial\eta}{\partial p}\right)_T}_{\text{teplotní roztažnost}}\dot{p} = \rho c_p\dot{T} - \alpha T\dot{p}$$ ← "pojmenujeme derivace"

$$\rho\dot{\epsilon} = \rho c_p\dot{T} - \alpha T\dot{p} = \underbrace{\rho c_p\frac{\partial T}{\partial t} + \rho c_p\,\vec{v}\cdot\operatorname{grad}T - \alpha T\left(\frac{\partial p}{\partial t} + \vec{v}\cdot\operatorname{grad}p\right)}_{\text{rozepíšeme materiálové derivace}}$$

Pravá strana rovnice, 1. člen:

$$\mathbf{t} : \mathbf{d} = \left(\frac{1}{3}(\operatorname{tr}\mathbf{t})\mathbf{I} + \mathbf{t}^{\mathrm{D}}\right) : \frac{1}{2}\left(\operatorname{grad}\vec{v} + (\operatorname{grad}\vec{v})^T\right) = \mathbf{t}^{\mathrm{D}} : \operatorname{grad}\vec{v}$$

$\mathbf{t}^{\mathrm{D}}$: deviátor napětí (symetrický tenzor)

$$\mathbf{I} : \operatorname{grad}\vec{v} = \delta_{ij}\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \operatorname{div}\vec{v} = 0$$

$$\mathbf{t}^{\mathrm{D}} : \operatorname{grad}\vec{v} = t^{\mathrm{D}}_{ij}\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = t^{\mathrm{D}}_{ji}\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \mathbf{t}^{\mathrm{D}} : (\operatorname{grad}\vec{v})^T$$

$$\rho\dot{\epsilon} = \mathbf{t} : \mathbf{d} - \operatorname{div}\vec{q} + \rho h$$

$$\rho\dot{\epsilon} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \rho c_p \vec{v} \cdot \operatorname{grad} T - \alpha T \left(\frac{\partial p}{\partial t} + \vec{v} \cdot \operatorname{grad} p \right) \leftarrow \text{levá strana}$$

$$\mathbf{t} : \mathbf{d} = \mathbf{t}^{\mathrm{D}} : \operatorname{grad}\vec{v} \leftarrow \text{pravá strana, 1. člen}$$

Pravá strana rovnice, 2. člen:

$$\vec{q} = -k \operatorname{grad} T \leftarrow \text{Fourierův zákon, } k \text{ je teplotní vodivost}$$

$$-\operatorname{div}\vec{q} = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} T)$$

Dáme vše dohromady a přeorganizujeme tak, aby na levé straně byla parciální derivace teploty podle času:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \underbrace{-\rho c_p \vec{v} \cdot \operatorname{grad} T}_{\text{advekce tepla „konvekce“}} + \underbrace{\operatorname{div}(k \operatorname{grad} T)}_{\text{vedení tepla „kondukce“}} + \underbrace{\alpha T \left(\frac{\partial p}{\partial t} + \vec{v} \cdot \operatorname{grad} p \right)}_{\text{adiabatické zahřívání}} + \underbrace{\mathbf{t}^{\mathrm{D}} : \operatorname{grad}\vec{v}}_{\text{disipativní zahřívání}} + \underbrace{\rho h}_{\text{zdroje}}$$

Pokud jsou zdroje nulové a zanedbáme adiabatické a disipativní zahřívání:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = -\rho c_p \vec{v} \cdot \operatorname{grad} T + \operatorname{div}(k \operatorname{grad} T)$$

Konstitutivní vztahy – intuitivní přístup

Opakování:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0$$ ← rovnice kontinuity (zákon zachování hmoty)

$$\operatorname{div} \mathbf{t} + \rho \vec{f} = \rho \frac{D\vec{v}}{Dt}, \quad \mathbf{t}^T = \mathbf{t}$$ ← pohybová rovnice a symetrie Cauchyho tenzoru napětí (zákon zachování hybnosti a momentu hybnosti)

$$\rho \frac{D\epsilon}{Dt} = \mathbf{t} : \mathbf{d} - \operatorname{div} \vec{q} + \rho h$$ ← zákon zachování energie

Neuvažujeme zde elektromagnetické jevy a chemické procesy. Termální procesy však nelze obecně vypustit, a to ze dvou důvodů:

(i) v reálném světě dochází vždy k přeměně (disipaci) deformační energie na teplo

(ii) deformační vlastnosti materiálů často silně závisí na teplotě

Zákony zachování obsahují *zdrojové členy* $\vec{f}, h$, o nichž předpokládáme, že jsou dány, a *neznámé* $\rho,\ \vec{v},\ \mathbf{t},\ \epsilon,\ \vec{q},\ (T)$.

Uvažujeme-li symetrii Cauchyho tenzoru napětí, pak celkový počet neznámých (ve složkách) je celkem 1+3+6+1+3+(1) = **14 (15)**, zatímco zákony zachování dávají rovnic pouze 1+3+1 = **5**.

Abychom mohli určit neznámé veličiny, musíme charakterizovat vlastnosti studovaného materiálu, to jest specifikovat ***konstitutivní vztahy***, a to tak, aby počet neznámých odpovídal počtu rovnic.

Příklad: Nestlačitelná viskózní kapalina

a) Předpokládejme, že materiál je homogenní a izotropní. Zanedbáváme disipaci. Nulový vtok a výtok tepla.

$$\operatorname{div}\vec{v} = 0$$
$$\operatorname{div}\mathbf{t} + \rho\vec{f} = \rho\frac{D\vec{v}}{Dt}$$
$$\mathbf{t} = -p\mathbf{I} + \eta\left[\operatorname{grad}\vec{v} + (\operatorname{grad}\vec{v})^T\right]$$ ← konstitutivní vztah pro newtonovskou kapalinu $(\mathbf{t} = -p\mathbf{I} + 2\eta\,\mathbf{d})$

Počet rovnic: 1 + 3 + 6 = 10

Známé materiálové parametry: $\rho,\ \eta$ (viskozita)

Známé zdrojové členy: síla $\rho\vec{f}$ a případně hraniční podmínky (vtok a výtok)

Počet neznámých ($\mathbf{t},\ \vec{v},\ p$) = 6 + 3 + 1 = 10

Máme tedy soustavu 10 parciálních diferenciálních rovnic (PDR) prvého řádu pro 10 neznámých.

Dosazením reologického vztahu do pohybové rovnice dostaneme: *

$$\operatorname{div}\left\{-p\mathbf{I} + \eta\left[\operatorname{grad}\vec{v} + (\operatorname{grad}\vec{v})^T\right]\right\} + \rho\vec{f} = -\operatorname{grad}p + \eta\operatorname{div}\operatorname{grad}\vec{v} + \rho\vec{f} = \rho\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \vec{v}\cdot\operatorname{grad}\vec{v}$$

Původních deset PDR prvního řádu tak nahradíme 4 PDR druhého řádu pro 4 neznámé $\vec{v}$ a p :

$$\operatorname{div}\vec{v} = 0$$
$$-\operatorname{grad}p + \eta\operatorname{div}\operatorname{grad}\vec{v} + \rho\vec{f} = \rho\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \vec{v}\cdot\operatorname{grad}\vec{v}$$ ← Navier-Stokesova rovnice

* $\operatorname{div}\left[\operatorname{grad}\vec{v} + (\operatorname{grad}\vec{v})^T\right] = \operatorname{div}\operatorname{grad}\vec{v} + \operatorname{grad}\cancel{\operatorname{div}}\vec{v} = \operatorname{div}\operatorname{grad}\vec{v}$

b) Systém je zahříván a ochlazován zvenčí. Parametry nezávisí na teplotě.

$$\operatorname{div}\vec{v} = 0$$

$$\operatorname{div}\mathbf{t} + \rho\vec{f} = \rho_0\frac{D\vec{v}}{Dt}$$

$$\mathbf{t} = -p\mathbf{I} + \eta\left[\operatorname{grad}\vec{v} + (\operatorname{grad}\vec{v})^T\right]$$

$$\rho_0 C_p\frac{\partial T}{\partial t} = -\rho_0 C_p\,\vec{v}\cdot\operatorname{grad}T + k\operatorname{div}\operatorname{grad}T$$

$$\rho = \rho_0\left[1-\alpha(T-T_0)\right]$$

Rovnice termální konvekce v Boussinesqově aproximaci.

$$\leftarrow\quad \rho\frac{D\epsilon}{Dt} = \mathbf{t}:\mathbf{d} - \operatorname{div}\vec{q} + \rho h$$

Známé materiálové parametry: $\rho_0,\ \eta,\ C_p,\ k,\ \alpha$

Počet neznámých ($\mathbf{t},\ \vec{v},\ p,\ \rho,\ T$) = 12 = počet rovnic

c) Ne-newtonovská nestlačitelná kapalina s teplotně závislými parametry

$$\operatorname{div}\vec{v} = 0$$

$$\operatorname{div}\mathbf{t} + \rho\vec{f} = \rho_0\frac{D\vec{v}}{Dt}$$

$$\rho_0 C_p\frac{\partial T}{\partial t} = -\rho_0 C_p\,\vec{v}\cdot\operatorname{grad}T + \operatorname{div}\left(k\operatorname{grad}T\right)$$

zákony zachování

$$\mathbf{t} = -p\mathbf{I} + \eta\left[\operatorname{grad}\vec{v} + (\operatorname{grad}\vec{v})^T\right]$$

$$\rho = \rho_0\left[1-\alpha(T-T_0)\right]$$

$$\eta = \eta\left(T, \mathrm{t_{II}}\right) \quad \leftarrow \text{reologie}$$

$$\alpha = \alpha\left(T\right),\ k = k(T),\ C_p = C_p(T)$$

konstitutivní vztahy

Příklad: Statická elastická deformace

Předpokládejme, že materiál je izotropní a deformace i napětí jsou malé. Deformace je termodynamicky reverzibilní, takže nedochází k disipaci mechanické energie.

$$\rho = \rho_0(1 - \operatorname{div}\vec{u})$$

$$\operatorname{div}\mathbf{t} + \rho\vec{f} = 0$$

$$\mathbf{t} = \lambda\,(\operatorname{div}\vec{u})\mathbf{I} + \mu\left[\operatorname{grad}\vec{u} + (\operatorname{grad}\vec{u})^T\right] \qquad \leftarrow \text{Hookův zákon} \quad (\mathbf{t} = \lambda(\operatorname{div}\vec{u})\mathbf{I} + 2\eta\,\tilde{\mathbf{e}})$$

Příklad: Elastické vlny

Předpokládejme, že materiál je dokonale elastický, izotropní, homogenní a deformace i napětí jsou malé.

$$\operatorname{div}\mathbf{t} + \cancel{\rho\vec{f}} = \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Dosazením Hookova zákona do pohybové rovnice dostaneme:

$$\lambda\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{u} + \mu\operatorname{div}\operatorname{grad}\vec{u} + \mu\operatorname{div}(\operatorname{grad}\vec{u})^T = \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

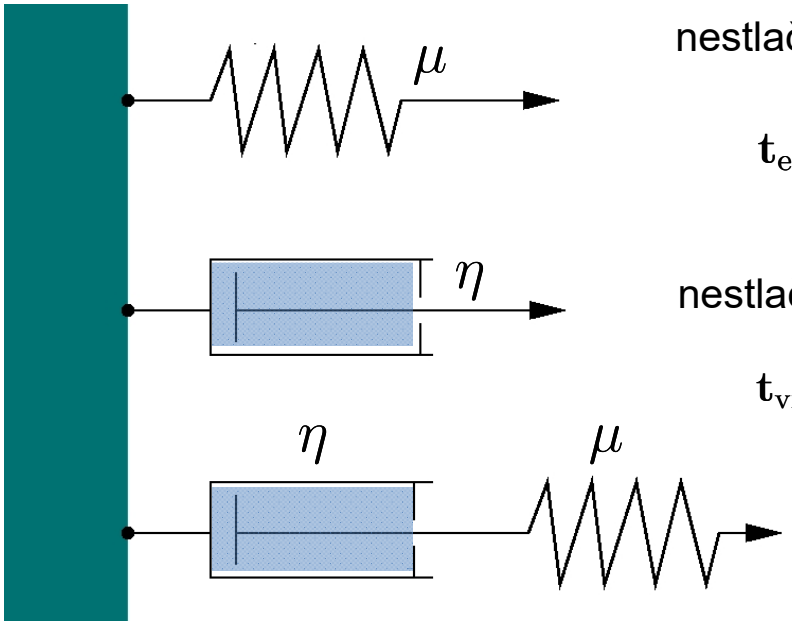
$$(\lambda + 2\mu)\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{u} - \mu\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{u} = \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Aplikací operátoru div a rot dostaneme:

$$\underbrace{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}\nabla^2\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}}_{\text{objemová vlna}}, \qquad \underbrace{\frac{\mu}{\rho}\nabla^2\vec{\Psi} = \frac{\partial^2\vec{\Psi}}{\partial t^2}}_{\text{střižná vlna}}, \qquad \text{kde} \quad \Phi = \operatorname{div}\vec{u} \quad \text{a} \quad \vec{\Psi} = \operatorname{rot}\vec{u}.$$

Příklad: Maxwellův viskoelastický model

Ke konstrukci viskoelastického modelu použijeme mechanické analogy:



nestlačitelná elasticita: $\lambda \to \infty,\ \operatorname{div} \vec{u} \to 0 \ \Rightarrow\ \lambda \operatorname{div} \vec{u} \to -p$

$$\mathbf{t}_{\mathrm{el}} = -p\mathbf{I} + \mu \left[\operatorname{grad} \vec{u} + (\operatorname{grad} \vec{u})^T\right] = -p\mathbf{I} + 2\mu \mathbf{e}_{\mathrm{el}}$$

nestlačitelná viskozita:

$$\mathbf{t}_{\mathrm{vis}} = -p\mathbf{I} + \eta \left[\operatorname{grad} \vec{v} + (\operatorname{grad} \vec{v})^T\right] = -p\mathbf{I} + 2\eta \mathbf{d}_{\mathrm{vis}}$$

Maxwellův model:

$$\mathbf{t}_{\mathrm{el}} = \mathbf{t}_{\mathrm{vis}}, \quad \mathbf{e} = \mathbf{e}_{\mathrm{el}} + \mathbf{e}_{\mathrm{vis}}$$

$$\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{d} = \dot{\mathbf{e}}_{\mathrm{el}} + \mathbf{d}_{\mathrm{vis}} = \frac{\dot{\mathbf{t}}^{\mathrm{D}}}{2\mu} + \frac{\mathbf{t}^{\mathrm{D}}}{2\eta}$$

$$\mathbf{t}^{\mathrm{D}} - \eta \left[\operatorname{grad} \vec{v} + (\operatorname{grad} \vec{v})^T\right] = -\frac{\eta}{\mu} \dot{\mathbf{t}}^{\mathrm{D}}$$

Máme tedy následující soustavu rovnic:

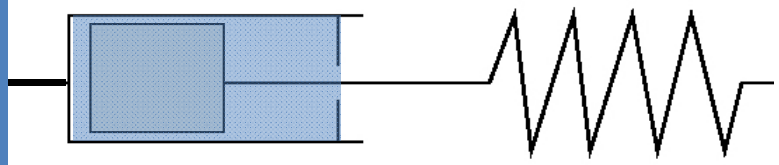
$$\operatorname{div} \vec{v} = 0$$

$$-\operatorname{grad} p + \operatorname{div} \mathbf{t}^{\mathrm{D}} + \rho \vec{f} = \rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \operatorname{grad} \vec{v}\right)$$

$$\mathbf{t}^{\mathrm{D}} - \eta \left[\operatorname{grad} \vec{v} + (\operatorname{grad} \vec{v})^T\right] = -\frac{\eta}{\mu} \left(\frac{\partial \mathbf{t}^{\mathrm{D}}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \operatorname{grad} \mathbf{t}^{\mathrm{D}}\right)$$

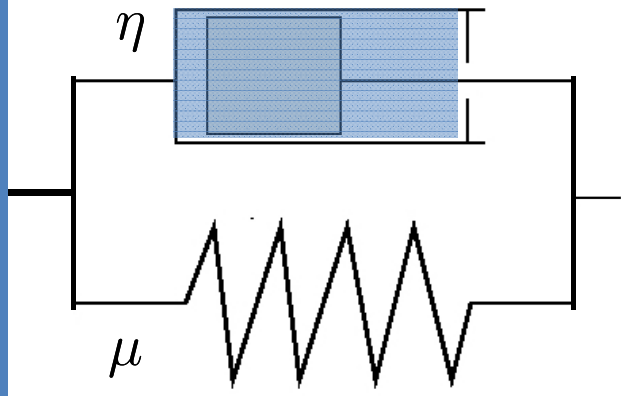
Počet rovnic souhlasí s počtem neznámých.

Vztah není invariantní vůči transformaci souřadné soustavy a platí pouze pro malé deformace (a nikoliv tedy pro viskoelastickou kapalinu).



Maxwellův model

$$\mathbf{t}_{\mathrm{el}} = \mathbf{t}_{\mathrm{vis}}, \quad \mathbf{e} = \mathbf{e}_{\mathrm{el}} + \mathbf{e}_{\mathrm{vis}}$$



Příklad: Kelvinův viskoelastický model

$$\mathbf{t}^{\mathrm{D}} = \mathbf{t}^{\mathrm{D}}_{\mathrm{el}} + \mathbf{t}^{\mathrm{D}}_{\mathrm{vis}}, \quad \mathbf{e}_{\mathrm{el}} = \mathbf{e}_{\mathrm{vis}} = \mathbf{e}$$

$$\mathbf{t}_{\mathrm{el}} = -p\mathbf{I} + \mu\left[\mathrm{grad}\,\vec{u} + (\mathrm{grad}\,\vec{u})^T\right] = -p\mathbf{I} + 2\,\mu\,\mathbf{e}_{\mathrm{el}}$$

$$\mathbf{t}_{\mathrm{vis}} = -p\mathbf{I} + \eta\left[\mathrm{grad}\,\vec{v} + (\mathrm{grad}\,\vec{v})^T\right] = -p\mathbf{I} + 2\,\eta\,\mathbf{d}_{\mathrm{vis}}$$

$$\mathbf{t} = -p\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{e} + 2\eta\dot{\mathbf{e}}$$

Platí pouze pro malé deformace!