Zákony zachování v lagrangeovském popisu

Zákon zachování hmoty

$$\int_V \rho_0(\vec{X})\,\mathrm{d}V = \int_{v(t)} \rho(\vec{x},t)\,\mathrm{d}v =$$

Zákony zachování v lagrangeovském popisu

Zákon zachování hmoty

$$\int_V \rho_0(\vec{X})\,\mathrm{d}V = \int_{v(t)} \rho(\vec{x},t)\,\mathrm{d}v = \int_V \underbrace{\rho\left(\vec{x}(\vec{X},t),t\right)}_{=:\,\varrho(\vec{X},t)} J\mathrm{d}V$$

Zákony zachování v lagrangeovském popisu

Zákon zachování hmoty

$$\int_V \rho_0(\vec{X})\,\mathrm{d}V = \int_{v(t)} \rho(\vec{x},t)\,\mathrm{d}v = \int_V \underbrace{\rho\left(\vec{x}(\vec{X},t),t\right)}_{=:\,\varrho(\vec{X},t)} J\mathrm{d}V = \int_V \varrho(\vec{X},t) J\mathrm{d}V$$

Zákony zachování v lagrangeovském popisu

Zákon zachování hmoty

$$\int_V \rho_0(\vec{X})\,\mathrm{d}V = \int_{v(t)} \rho(\vec{x},t)\,\mathrm{d}v = \int_V \underbrace{\rho\left(\vec{x}(\vec{X},t),t\right)}_{=:\,\varrho(\vec{X},t)} J\mathrm{d}V = \int_V \varrho(\vec{X},t) J\mathrm{d}V \quad \Rightarrow \quad \boxed{\rho_0 = J\varrho}$$

Zákony zachování v lagrangeovském popisu

Zákon zachování hmoty

$$\int_V \rho_0(\vec{X})\,\mathrm{d}V = \int_{v(t)} \rho(\vec{x},t)\,\mathrm{d}v = \int_V \underbrace{\rho\left(\vec{x}(\vec{X},t),t\right)}_{=:\,\varrho(\vec{X},t)} J\mathrm{d}V = \int_V \varrho(\vec{X},t)J\mathrm{d}V \quad \Rightarrow \quad \boxed{\rho_0 = J\varrho}$$

Vyjádření rovnice kontinuity v posunutí:

Zákony zachování v lagrangeovském popisu

Zákon zachování hmoty

$$\int_V \rho_0(\vec{X})\,\mathrm{d}V = \int_{v(t)} \rho(\vec{x},t)\,\mathrm{d}v = \int_V \underbrace{\rho\left(\vec{x}(\vec{X},t),t\right)}_{=:\,\varrho(\vec{X},t)} J\mathrm{d}V = \int_V \varrho(\vec{X},t) J\mathrm{d}V \quad \Rightarrow \quad \boxed{\rho_0 = J\varrho}$$

Vyjádření rovnice kontinuity v posunutí:

$$\rho_0 = J\varrho = (\det \mathbf{F})\varrho = \det\left(\mathbf{I} + \mathbf{H}^T\right)\varrho = \det\left(\mathbf{I} + (\mathrm{Grad}\,\vec{U})^T\right)\varrho$$

Zákony zachování v lagrangeovském popisu

Zákon zachování hmoty

$$\int_V \rho_0(\vec{X})\,\mathrm{d}V = \int_{v(t)} \rho(\vec{x},t)\,\mathrm{d}v = \int_V \underbrace{\rho\left(\vec{x}(\vec{X},t),t\right)}_{=:\,\varrho(\vec{X},t)} J\mathrm{d}V = \int_V \varrho(\vec{X},t) J\mathrm{d}V \quad \Rightarrow \quad \boxed{\rho_0 = J\varrho}$$

Vyjádření rovnice kontinuity v posunutí:

$$\rho_0 = J\varrho = (\det \mathbf{F})\varrho = \det\left(\mathbf{I} + \mathbf{H}^T\right)\varrho = \det\left(\mathbf{I} + (\mathrm{Grad}\,\vec{U})^T\right)\varrho$$

$$\rho_0 \approx (1 + \mathrm{Div}\,\vec{U})\varrho \approx (1 + \mathrm{div}\,\vec{u})\varrho$$

Zákony zachování v lagrangeovském popisu

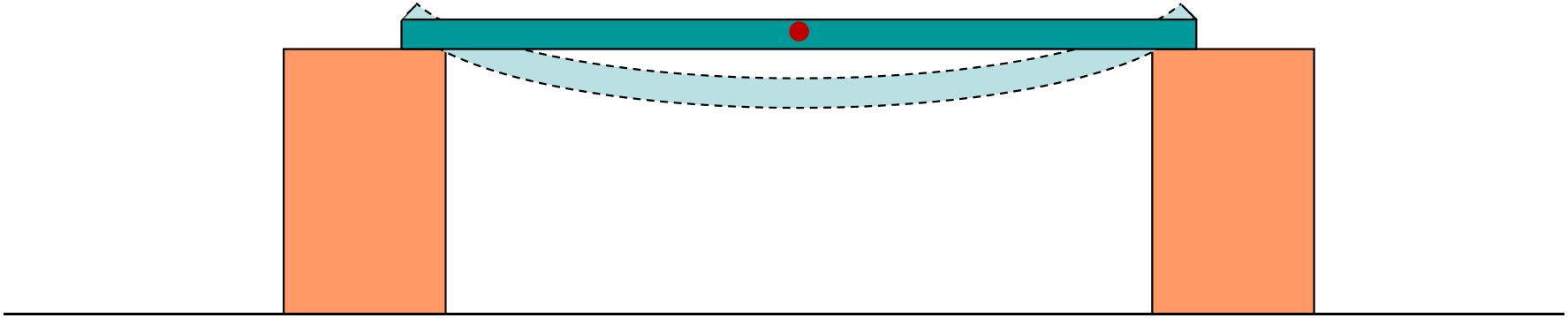
Zákon zachování hmoty

$$\int_V \rho_0(\vec{X})\,\mathrm{d}V = \int_{v(t)} \rho(\vec{x},t)\,\mathrm{d}v = \int_V \underbrace{\rho\left(\vec{x}(\vec{X},t),t\right)}_{=:\,\varrho(\vec{X},t)} J\mathrm{d}V = \int_V \varrho(\vec{X},t) J\mathrm{d}V \quad \Rightarrow \quad \boxed{\rho_0 = J\varrho}$$

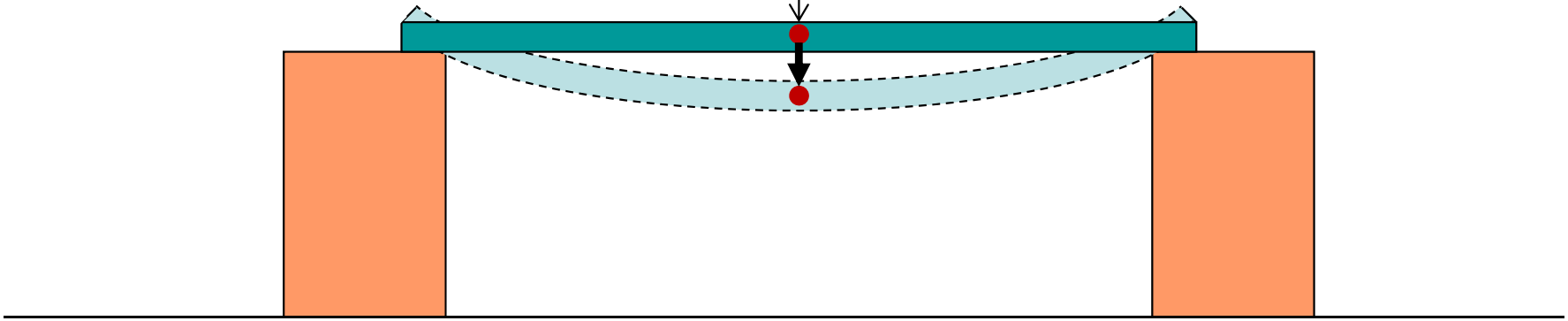
Vyjádření rovnice kontinuity v posunutí:

$$\rho_0 = J\varrho = (\det \mathbf{F})\varrho = \det\left(\mathbf{I} + \mathbf{H}^T\right)\varrho = \det\left(\mathbf{I} + (\mathrm{Grad}\,\vec{U})^T\right)\varrho$$

$$\rho_0 \approx (1 + \mathrm{Div}\,\vec{U})\varrho \approx (1 + \mathrm{div}\,\vec{u})\varrho \quad \Rightarrow \quad \rho = \rho_0 - \rho_0 \mathrm{div}\,\vec{u}$$



$$\rho_0(\vec{X}) = J\varrho(\vec{X}, t)$$

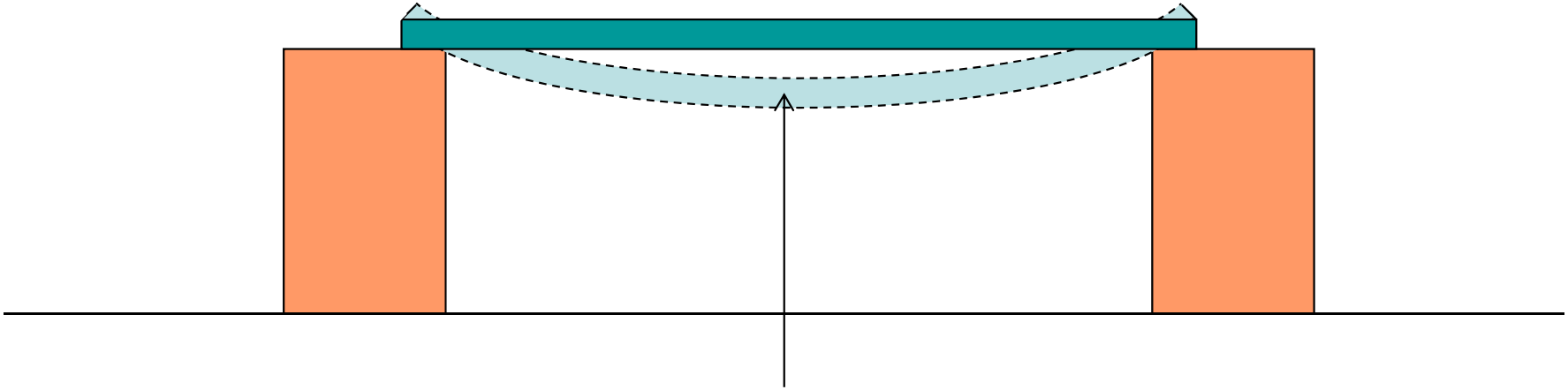


Zákony zachování v lagrangeovském popisu

Zákon zachování hmoty

$$\int_V \rho_0(\vec{X})\,\mathrm{d}V = \int_{v(t)} \rho(\vec{x},t)\,\mathrm{d}v = \int_V \underbrace{\rho\left(\vec{x}(\vec{X},t),t\right)}_{=:\,\varrho(\vec{X},t)} J\mathrm{d}V = \int_V \varrho(\vec{X},t)J\mathrm{d}V \quad \Rightarrow \quad \boxed{\rho_0 = J\varrho}$$

Pohybová rovnice



$$\operatorname{div} \mathbf{t} + \rho \vec{f} = \rho \frac{D\vec{v}}{Dt}$$

Diferenciální operátory v prostorových a materiálových souřadnicích

Notace

Operátory píšeme velkým nebo malým písmenem podle toho, zda derivujeme podle materiálových (X_1, X_2, X_3) nebo prostorových (x_1, x_2, x_3) souřadnic:

$$\mathrm{Grad} = \vec{E}_K \frac{\partial}{\partial X_K}, \quad \mathrm{grad} = \vec{e}_k \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad \mathrm{Div} = \vec{E}_K \frac{\partial}{\partial X_K} \cdot, \quad \mathrm{div} = \vec{e}_k \frac{\partial}{\partial x_k} \cdot$$

Indexy psané velkými/malými písmeny značí složky v bázi $\{\vec{E}_K\}/\{\vec{e}_k\}$.

Platí následující vztahy:

$$\mathrm{grad}\ \bullet = \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathrm{Grad}\ \bullet$$

$$\mathrm{div}\ \bullet = \mathbf{F}^{-T} : \mathrm{Grad}\ \bullet$$

$$\mathrm{div}\ \mathrm{grad}\ \bullet = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{F}^{-T} : \mathrm{Grad}\ \mathrm{Grad}\ \bullet \ + \ \mathrm{div}\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathrm{Grad}\ \bullet$$

$$\mathrm{Grad}\ \bullet = \mathbf{F}^{T} \cdot \mathrm{grad}\ \bullet$$

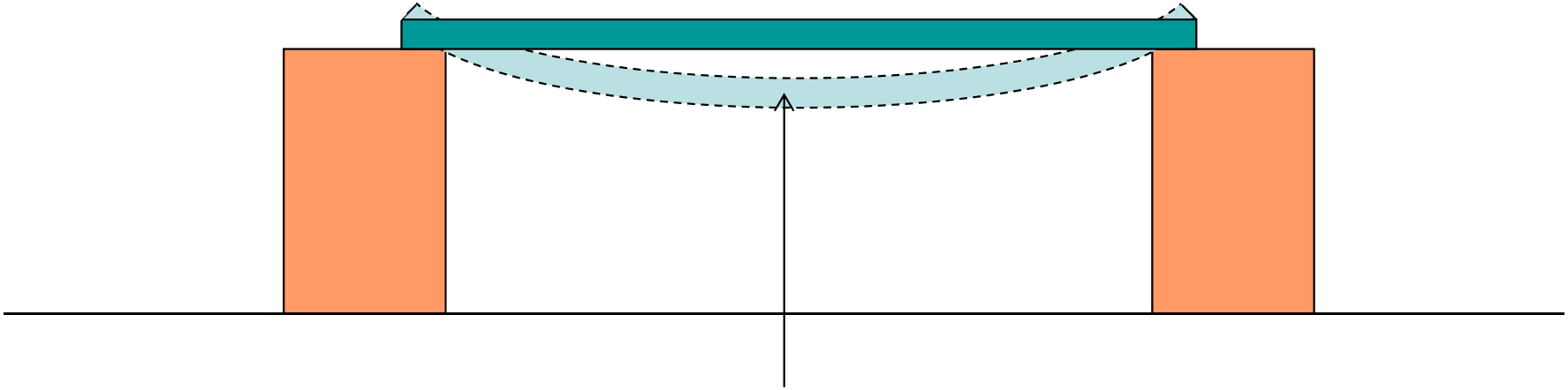
$$\mathrm{Div}\ \bullet = \mathbf{F}^{T} : \mathrm{grad}\ \bullet$$

$$\mathrm{Div}\ \mathrm{Grad}\ \bullet = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{T} : \mathrm{grad}\ \mathrm{grad}\ \bullet \ + \ \mathrm{Div}\mathbf{F}^{T} \cdot \mathrm{grad}\ \bullet$$

Příklad: Ukažte, že $\mathrm{div}\ \vec{v} = \mathbf{F}^{-T} : \mathrm{Grad}\ \vec{V}$.

$$\mathrm{div}\ \vec{v} = \vec{e}_k \frac{\partial}{\partial x_k} \cdot v_l \vec{e}_l = \frac{\partial v_k}{\partial x_k} = \frac{\partial V_k}{\partial X_K} \frac{\partial X_K}{\partial x_k} = \frac{\partial V_k}{\partial X_K} F^{-1}_{Kk} = F^{-1}_{Kk} \frac{\partial V_k}{\partial X_K} = F^{-1}_{Kk} (\mathrm{Grad}\, \vec{V})_{Kk} =$$

$$= F^{-T}_{kK} (\mathrm{Grad}\, \vec{V})_{Kk} = \mathbf{F}^{-T} : \mathrm{Grad}\ \vec{V}$$



$$\operatorname{div} \mathbf{t} + \rho \vec{f} = \rho \frac{D\vec{v}}{Dt}$$

$$\mathbf{t} = J^{-1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}^{(1)}$$

Zákony zachování v lagrangeovském popisu

Zákon zachování hmoty

$$\int_V \rho_0(\vec{X})\,\mathrm{d}V = \int_{v(t)} \rho(\vec{x},t)\,\mathrm{d}v = \int_V \underbrace{\rho\left(\vec{x}(\vec{X},t),t\right)}_{=:\,\varrho(\vec{X},t)} J\mathrm{d}V = \int_V \varrho(\vec{X},t)J\mathrm{d}V \quad \Rightarrow \quad \boxed{\rho_0 = J\varrho}$$

Pohybová rovnice

Do pohybové rovnice v okamžité konfiguraci

$$\mathrm{div}\,\mathbf{t} + \rho\vec{f} = \rho\frac{D\vec{v}}{Dt}$$

Zákony zachování v lagrangeovském popisu

Zákon zachování hmoty

$$\int_V \rho_0(\vec{X})\,\mathrm{d}V = \int_{v(t)} \rho(\vec{x},t)\,\mathrm{d}v = \int_V \underbrace{\rho\left(\vec{x}(\vec{X},t),t\right)}_{=:\,\varrho(\vec{X},t)} J\mathrm{d}V = \int_V \varrho(\vec{X},t) J\mathrm{d}V \quad \Rightarrow \quad \boxed{\rho_0 = J\varrho}$$

Pohybová rovnice

Do pohybové rovnice v okamžité konfiguraci

$$\mathrm{div}\,\mathbf{t} + \rho\vec{f} = \rho\frac{D\vec{v}}{Dt}$$

dosadíme $\mathbf{t} = J^{-1}\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}^{(1)}$, $\rho = J^{-1}\rho_0$ a $\vec{F}(\vec{X},t) := \vec{f}\left(x(\vec{X},t),t\right)$

Zákony zachování v lagrangeovském popisu

Zákon zachování hmoty

$$\int_V \rho_0(\vec{X})\,\mathrm{d}V = \int_{v(t)} \rho(\vec{x},t)\,\mathrm{d}v = \int_V \underbrace{\rho\left(\vec{x}(\vec{X},t),t\right)}_{=:\,\varrho(\vec{X},t)} J\mathrm{d}V = \int_V \varrho(\vec{X},t) J\mathrm{d}V \quad \Rightarrow \quad \boxed{\rho_0 = J\varrho}$$

Pohybová rovnice

Do pohybové rovnice v okamžité konfiguraci

$$\mathrm{div}\,\mathbf{t} + \rho\vec{f} = \rho\frac{D\vec{v}}{Dt}$$

dosadíme $\mathbf{t} = J^{-1}\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}^{(1)}$, $\rho = J^{-1}\rho_0$ a $\vec{F}(\vec{X},t) := \vec{f}\left(x(\vec{X},t),t\right)$ a použijeme následující identity:

$$\mathrm{div}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = (\mathrm{div}\,\mathbf{A})\cdot\mathbf{B} + \mathbf{A}^T : \mathrm{grad}\,\mathbf{B}, \quad \mathrm{div}(J^{-1}\mathbf{F}) = 0 \quad \text{a} \quad \mathbf{F}^T : \mathrm{grad}\,\bullet = \mathrm{Div}\,\bullet.$$

Zákony zachování v lagrangeovském popisu

Zákon zachování hmoty

$$\int_V \rho_0(\vec{X})\,\mathrm{d}V = \int_{v(t)} \rho(\vec{x},t)\,\mathrm{d}v = \int_V \underbrace{\rho\left(\vec{x}(\vec{X},t),t\right)}_{=:\,\varrho(\vec{X},t)} J\mathrm{d}V = \int_V \varrho(\vec{X},t) J\mathrm{d}V \quad \Rightarrow \quad \boxed{\rho_0 = J\varrho}$$

Pohybová rovnice

Do pohybové rovnice v okamžité konfiguraci

$$\mathrm{div}\,\mathbf{t} + \rho\vec{f} = \rho\frac{D\vec{v}}{Dt}$$

dosadíme $\mathbf{t} = J^{-1}\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}^{(1)}$, $\rho = J^{-1}\rho_0$ a $\vec{F}(\vec{X},t) := \vec{f}\left(x(\vec{X},t),t\right)$ a použijeme následující identity:

$$\mathrm{div}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = (\mathrm{div}\,\mathbf{A})\cdot\mathbf{B} + \mathbf{A}^T : \mathrm{grad}\,\mathbf{B}, \quad \mathrm{div}(J^{-1}\mathbf{F}) = 0 \quad \text{a} \quad \mathbf{F}^T : \mathrm{grad}\,\bullet = \mathrm{Div}\,\bullet.$$

Potom

$$\mathrm{div}\,\mathbf{t} =$$

Zákony zachování v lagrangeovském popisu

Zákon zachování hmoty

$$\int_V \rho_0(\vec{X})\,\mathrm{d}V = \int_{v(t)} \rho(\vec{x},t)\,\mathrm{d}v = \int_V \underbrace{\rho\left(\vec{x}(\vec{X},t),t\right)}_{=:\,\varrho(\vec{X},t)} J\mathrm{d}V = \int_V \varrho(\vec{X},t) J\mathrm{d}V \quad \Rightarrow \quad \boxed{\rho_0 = J\varrho}$$

Pohybová rovnice

Do pohybové rovnice v okamžité konfiguraci

$$\mathrm{div}\,\mathbf{t} + \rho\vec{f} = \rho\frac{D\vec{v}}{Dt}$$

dosadíme $\mathbf{t} = J^{-1}\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}^{(1)}$, $\rho = J^{-1}\rho_0$ a $\vec{F}(\vec{X},t) := \vec{f}\left(x(\vec{X},t),t\right)$ a použijeme následující identity:

$$\mathrm{div}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = (\mathrm{div}\,\mathbf{A})\cdot\mathbf{B} + \mathbf{A}^T : \mathrm{grad}\,\mathbf{B}, \quad \mathrm{div}(J^{-1}\mathbf{F}) = 0 \quad \text{a} \quad \mathbf{F}^T : \mathrm{grad}\,\bullet = \mathrm{Div}\,\bullet.$$

Potom

$$\mathrm{div}\,\mathbf{t} = \mathrm{div}(J^{-1}\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}^{(1)}) =$$

Zákony zachování v lagrangeovském popisu

Zákon zachování hmoty

$$\int_V \rho_0(\vec{X})\,\mathrm{d}V = \int_{v(t)} \rho(\vec{x},t)\,\mathrm{d}v = \int_V \underbrace{\rho\left(\vec{x}(\vec{X},t),t\right)}_{=:\,\varrho(\vec{X},t)} J\mathrm{d}V = \int_V \varrho(\vec{X},t) J\mathrm{d}V \quad \Rightarrow \quad \boxed{\rho_0 = J\varrho}$$

Pohybová rovnice

Do pohybové rovnice v okamžité konfiguraci

$$\mathrm{div}\,\mathbf{t} + \rho\vec{f} = \rho\frac{D\vec{v}}{Dt}$$

dosadíme $\mathbf{t} = J^{-1}\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}^{(1)}$, $\rho = J^{-1}\rho_0$ a $\vec{F}(\vec{X},t) := \vec{f}\left(x(\vec{X},t),t\right)$ a použijeme následující identity:

$$\mathrm{div}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = (\mathrm{div}\,\mathbf{A})\cdot\mathbf{B} + \mathbf{A}^T : \mathrm{grad}\,\mathbf{B}, \quad \mathrm{div}(J^{-1}\mathbf{F}) = 0 \quad \text{a} \quad \mathbf{F}^T : \mathrm{grad}\,\bullet = \mathrm{Div}\,\bullet.$$

Potom

$$\mathrm{div}\,\mathbf{t} = \mathrm{div}(J^{-1}\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}^{(1)}) = \mathrm{div}(J^{-1}\mathbf{F})\cdot\mathbf{T}^{(1)} + J^{-1}\mathbf{F}^T : \mathrm{grad}\,\mathbf{T}^{(1)} =$$

Zákony zachování v lagrangeovském popisu

Zákon zachování hmoty

$$\int_V \rho_0(\vec{X})\,\mathrm{d}V = \int_{v(t)} \rho(\vec{x},t)\,\mathrm{d}v = \int_V \underbrace{\rho\left(\vec{x}(\vec{X},t),t\right)}_{=:\,\varrho(\vec{X},t)} J\mathrm{d}V = \int_V \varrho(\vec{X},t) J\mathrm{d}V \quad \Rightarrow \quad \boxed{\rho_0 = J\varrho}$$

Pohybová rovnice

Do pohybové rovnice v okamžité konfiguraci

$$\mathrm{div}\,\mathbf{t} + \rho\vec{f} = \rho\frac{D\vec{v}}{Dt}$$

dosadíme $\mathbf{t} = J^{-1}\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}^{(1)}$, $\rho = J^{-1}\rho_0$ a $\vec{F}(\vec{X},t) := \vec{f}\left(x(\vec{X},t),t\right)$ a použijeme následující identity:

$$\mathrm{div}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = (\mathrm{div}\,\mathbf{A})\cdot\mathbf{B} + \mathbf{A}^T : \mathrm{grad}\,\mathbf{B}, \quad \mathrm{div}(J^{-1}\mathbf{F}) = 0 \quad \text{a} \quad \mathbf{F}^T : \mathrm{grad}\,\bullet = \mathrm{Div}\,\bullet.$$

Potom

$$\mathrm{div}\,\mathbf{t} = \mathrm{div}(J^{-1}\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}^{(1)}) = \mathrm{div}(J^{-1}\mathbf{F})\cdot\mathbf{T}^{(1)} + J^{-1}\mathbf{F}^T : \mathrm{grad}\,\mathbf{T}^{(1)} =$$

Zákony zachování v lagrangeovském popisu

Zákon zachování hmoty

$$\int_V \rho_0(\vec{X})\,\mathrm{d}V = \int_{v(t)} \rho(\vec{x},t)\,\mathrm{d}v = \int_V \underbrace{\rho\left(\vec{x}(\vec{X},t),t\right)}_{=:\,\varrho(\vec{X},t)} J\mathrm{d}V = \int_V \varrho(\vec{X},t) J\mathrm{d}V \quad \Rightarrow \quad \boxed{\rho_0 = J\varrho}$$

Pohybová rovnice

Do pohybové rovnice v okamžité konfiguraci

$$\mathrm{div}\,\mathbf{t} + \rho\vec{f} = \rho\frac{D\vec{v}}{Dt}$$

dosadíme $\mathbf{t} = J^{-1}\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}^{(1)}$, $\rho = J^{-1}\rho_0$ a $\vec{F}(\vec{X},t) := \vec{f}\left(x(\vec{X},t),t\right)$ a použijeme následující identity:

$$\mathrm{div}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = (\mathrm{div}\,\mathbf{A})\cdot\mathbf{B} + \mathbf{A}^T : \mathrm{grad}\,\mathbf{B}, \quad \mathrm{div}(J^{-1}\mathbf{F}) = 0 \quad \text{a} \quad \mathbf{F}^T : \mathrm{grad}\,\bullet = \mathrm{Div}\,\bullet.$$

Potom

$$\mathrm{div}\,\mathbf{t} = \mathrm{div}(J^{-1}\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}^{(1)}) = \mathrm{div}(J^{-1}\mathbf{F})\cdot\mathbf{T}^{(1)} + J^{-1}\mathbf{F}^T : \mathrm{grad}\,\mathbf{T}^{(1)} = J^{-1}\mathrm{Div}\,\mathbf{T}^{(1)}$$

Zákony zachování v lagrangeovském popisu

Zákon zachování hmoty

$$\int_V \rho_0(\vec{X})\,\mathrm{d}V = \int_{v(t)} \rho(\vec{x},t)\,\mathrm{d}v = \int_V \underbrace{\rho\left(\vec{x}(\vec{X},t),t\right)}_{=:\,\varrho(\vec{X},t)} J\mathrm{d}V = \int_V \varrho(\vec{X},t) J\mathrm{d}V \quad \Rightarrow \quad \boxed{\rho_0 = J\varrho}$$

Pohybová rovnice

Do pohybové rovnice v okamžité konfiguraci

$$\mathrm{div}\,\mathbf{t} + \rho\vec{f} = \rho\frac{D\vec{v}}{Dt}$$

dosadíme $\mathbf{t} = J^{-1}\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}^{(1)}$, $\rho = J^{-1}\rho_0$ a $\vec{F}(\vec{X},t) := \vec{f}\left(x(\vec{X},t),t\right)$ a použijeme následující identity:

$$\mathrm{div}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = (\mathrm{div}\,\mathbf{A})\cdot\mathbf{B} + \mathbf{A}^T : \mathrm{grad}\,\mathbf{B}, \quad \mathrm{div}(J^{-1}\mathbf{F}) = 0 \quad \text{a} \quad \mathbf{F}^T : \mathrm{grad}\,\bullet = \mathrm{Div}\,\bullet.$$

Potom

$$\mathrm{div}\,\mathbf{t} = \mathrm{div}(J^{-1}\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}^{(1)}) = \mathrm{div}(J^{-1}\mathbf{F})\cdot\mathbf{T}^{(1)} + J^{-1}\mathbf{F}^T : \mathrm{grad}\,\mathbf{T}^{(1)} = J^{-1}\mathrm{Div}\,\mathbf{T}^{(1)}$$

a pohybová rovnice má tedy tvar

$$\boxed{\mathrm{Div}\,\mathbf{T}^{(1)} + \rho_0\vec{F} = \rho_0\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}}$$

Zákony zachování v lagrangeovském popisu

Zákon zachování hmoty

$$\int_V \rho_0(\vec{X})\,\mathrm{d}V = \int_{v(t)} \rho(\vec{x},t)\,\mathrm{d}v = \int_V \underbrace{\rho\left(\vec{x}(\vec{X},t),t\right)}_{=:\,\varrho(\vec{X},t)} J\mathrm{d}V = \int_V \varrho(\vec{X},t) J\mathrm{d}V \quad \Rightarrow \quad \boxed{\rho_0 = J\varrho}$$

Pohybová rovnice

Do pohybové rovnice v okamžité konfiguraci

$$\mathrm{div}\,\mathbf{t} + \rho\vec{f} = \rho\frac{D\vec{v}}{Dt}$$

dosadíme $\mathbf{t} = J^{-1}\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}^{(1)}$, $\rho = J^{-1}\rho_0$ a $\vec{F}(\vec{X},t) := \vec{f}\left(x(\vec{X},t),t\right)$ a použijeme následující identity:

$$\mathrm{div}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = (\mathrm{div}\,\mathbf{A})\cdot\mathbf{B} + \mathbf{A}^T : \mathrm{grad}\,\mathbf{B}, \quad \mathrm{div}(J^{-1}\mathbf{F}) = 0 \quad \text{a} \quad \mathbf{F}^T : \mathrm{grad}\,\bullet = \mathrm{Div}\,\bullet.$$

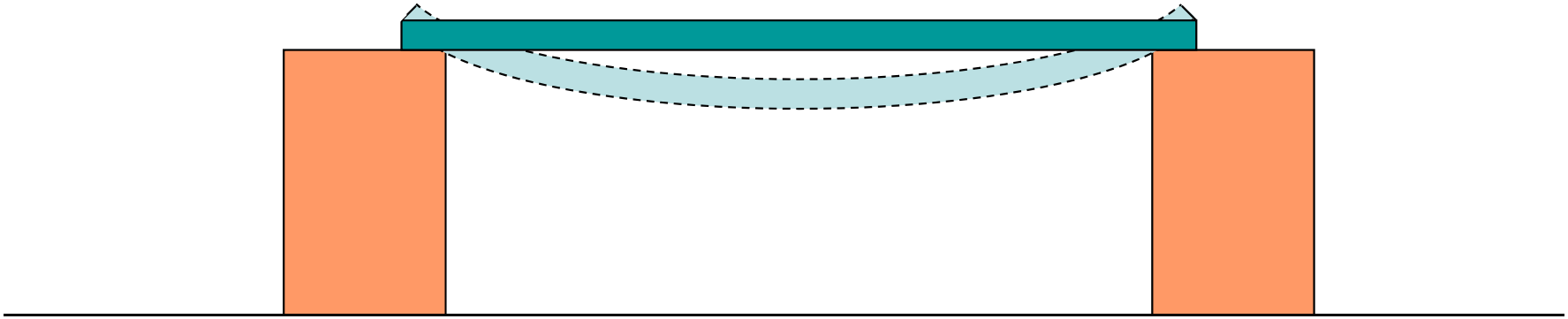
Potom

$$\mathrm{div}\,\mathbf{t} = \mathrm{div}(J^{-1}\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}^{(1)}) = \mathrm{div}(J^{-1}\mathbf{F})\cdot\mathbf{T}^{(1)} + J^{-1}\mathbf{F}^T : \mathrm{grad}\,\mathbf{T}^{(1)} = J^{-1}\mathrm{Div}\,\mathbf{T}^{(1)}$$

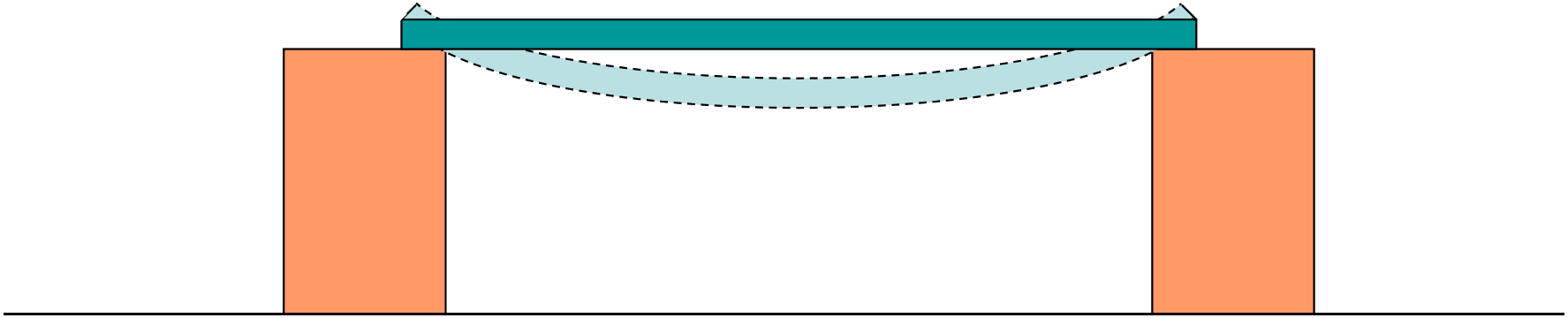
a pohybová rovnice má tedy tvar

$$\boxed{\mathrm{Div}\,\mathbf{T}^{(1)} + \rho_0\vec{F} = \rho_0\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}}$$

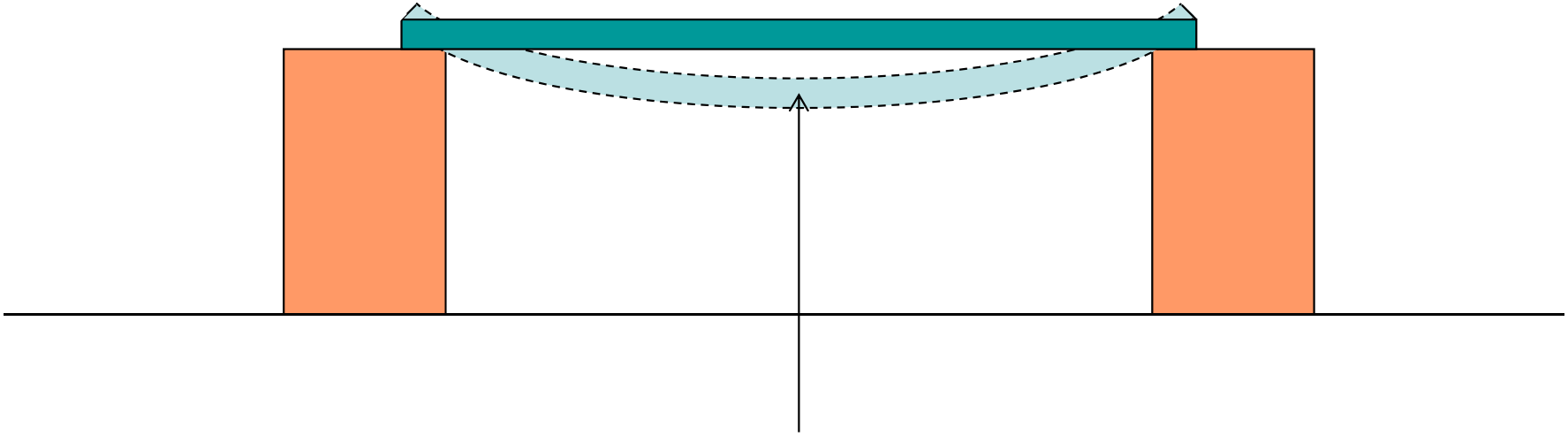
Použitím vztahu $\mathbf{T}^{(1)} = \mathbf{T}^{(2)}\cdot\mathbf{F}^T$ bychom odvodili analogický vztah pro druhý Piola-Kirchhoffův tenzor.



$$\operatorname{div} \mathbf{t} + \rho \vec{f} = \rho \frac{D\vec{v}}{Dt}$$

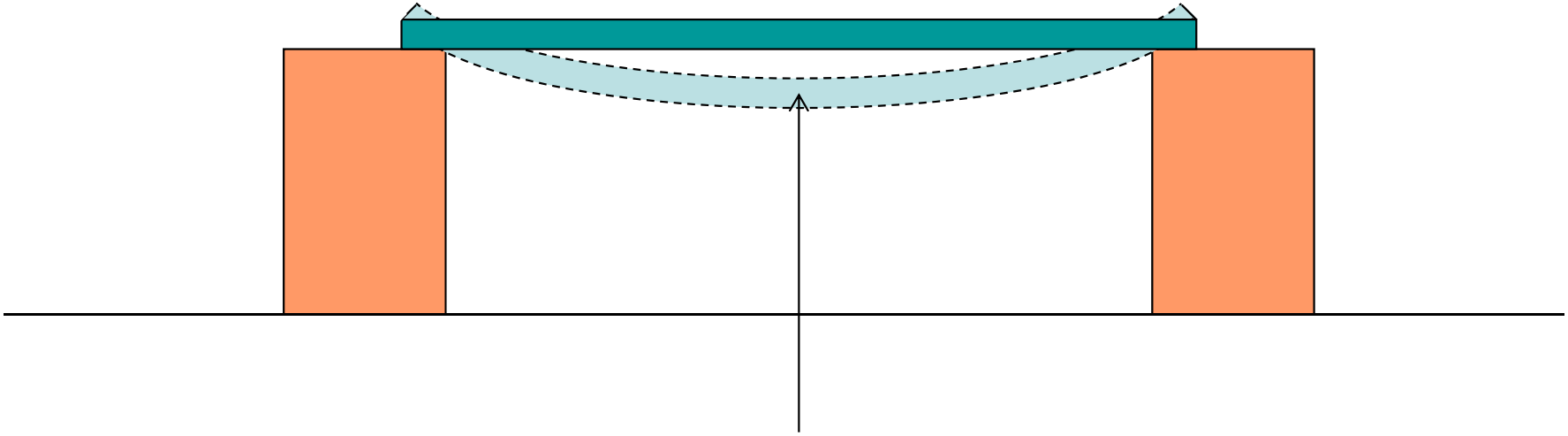


$$\operatorname{div} \mathbf{t} + \rho \vec{f} = 0$$



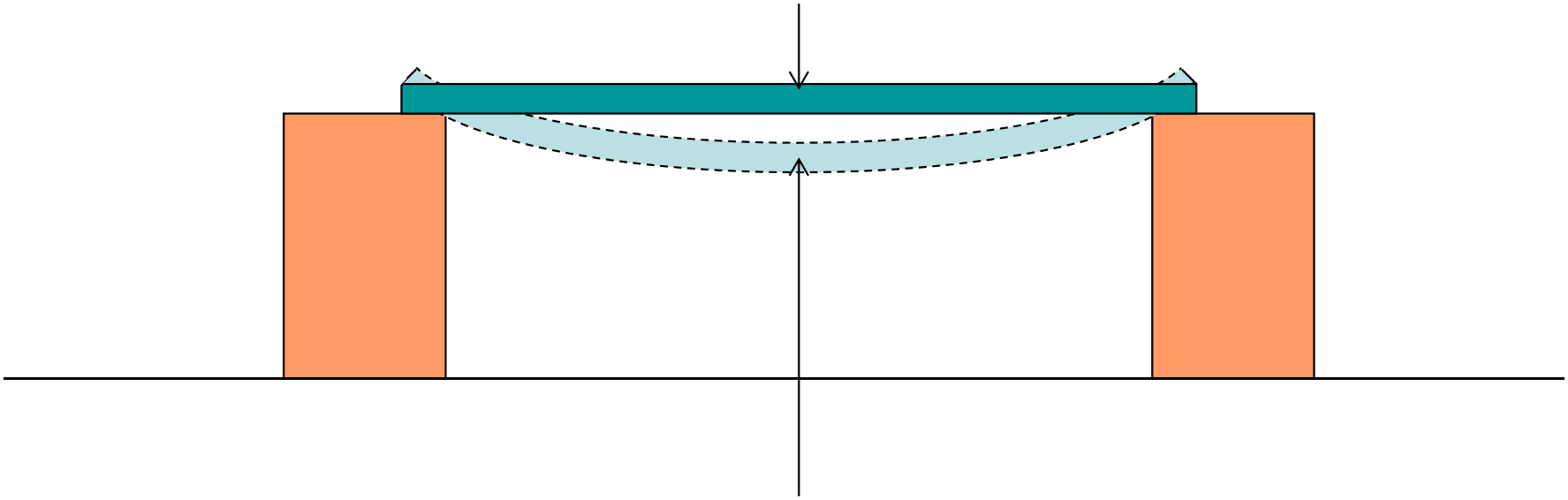
$$\operatorname{div} \mathbf{t} + \rho \vec{f} = 0$$

$$\mathrm{Div}\,\mathbf{T}^{(1)} + \rho_0 \vec{F} = \rho_0 \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}$$



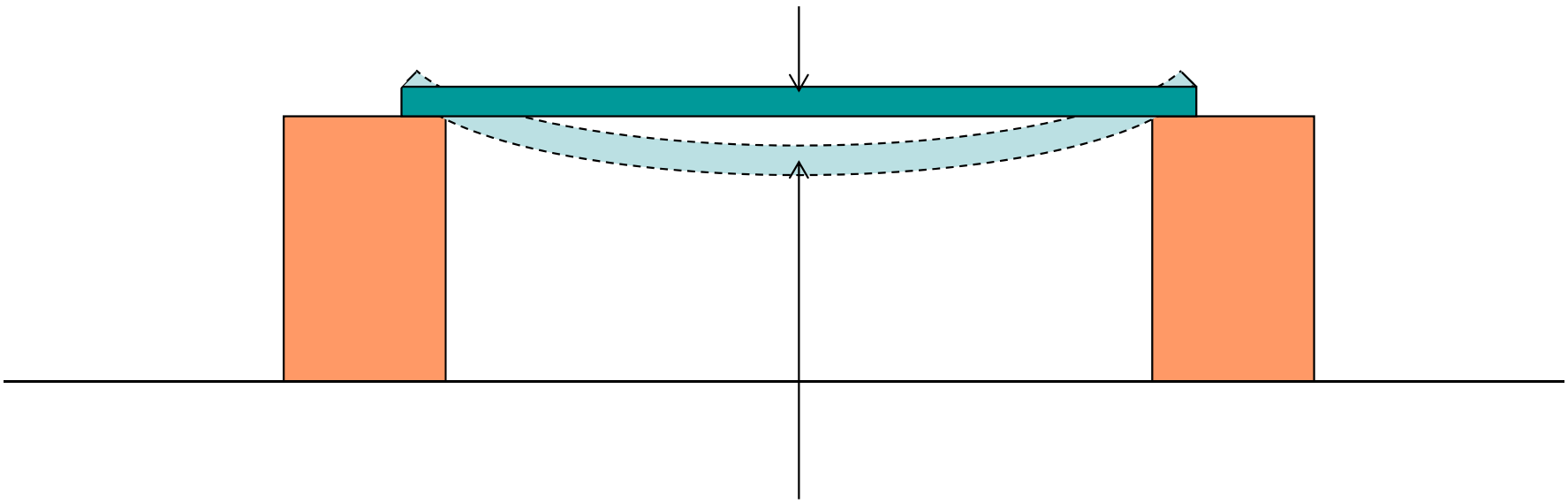
$$\mathrm{div}\,\mathbf{t} + \rho \vec{f} = 0$$

$$\mathrm{Div}\,\mathbf{T}^{(1)} + \rho_0 \vec{F} = 0$$



$$\mathrm{div}\,\mathbf{t} + \rho \vec{f} = 0$$

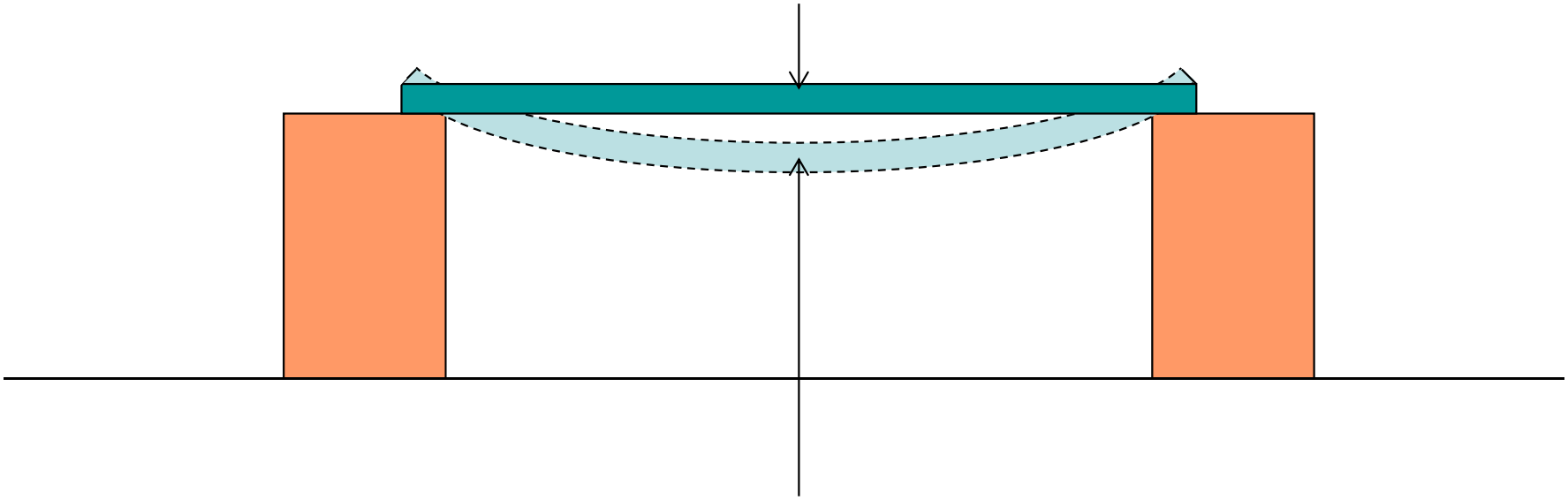
$$\mathrm{Div}\,\mathbf{T}^{(1)} + \rho_0 \vec{F} = 0$$



$$\mathrm{div}\,\mathbf{t} + \rho \vec{f} = 0$$

Hraniční podmínky (eulerovsky): $\vec{n} \cdot \mathbf{t} = 0$

$$\mathrm{Div}\,\mathbf{T}^{(1)} + \rho_0 \vec{F} = 0$$



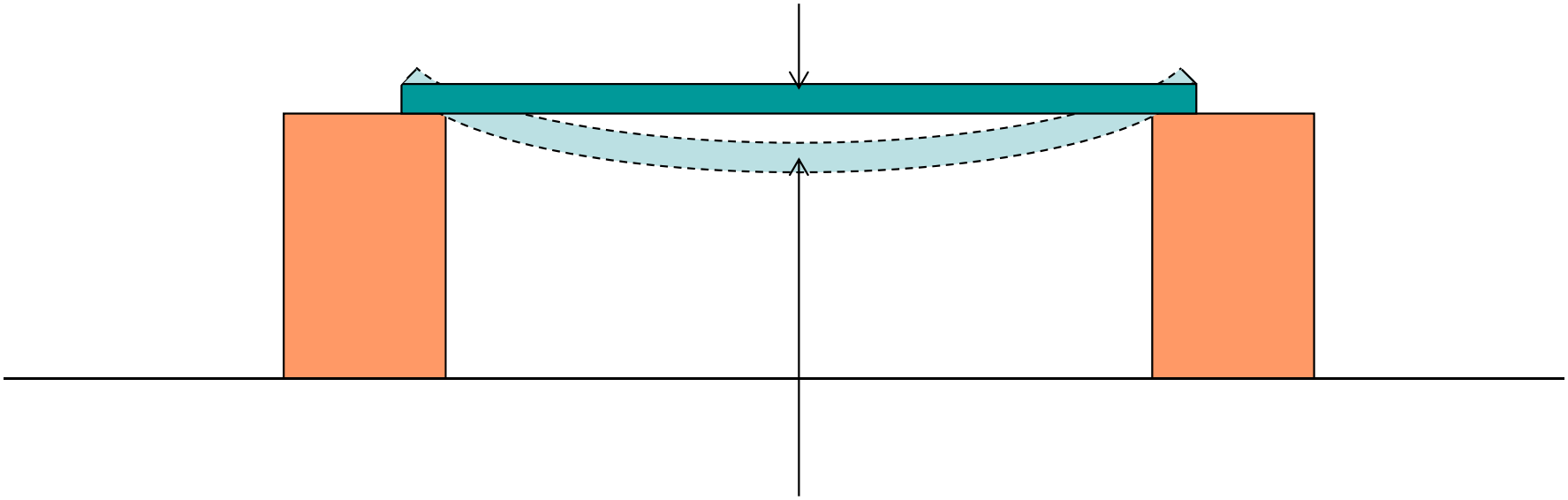
$$\mathrm{div}\,\mathbf{t} + \rho \vec{f} = 0$$

Hraniční podmínky (eulerovsky): $\vec{n} \cdot \mathbf{t} = 0$

$$\vec{n} = \frac{\vec{N} \cdot \mathbf{F}^{-1}}{\sqrt{\vec{N} \cdot \mathbf{B} \cdot \vec{N}}}$$

$$\mathbf{t} = J^{-1}\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}^{(1)}$$

$$\mathrm{Div}\,\mathbf{T}^{(1)} + \rho_0 \vec{F} = 0$$



$$\mathrm{div}\,\mathbf{t} + \rho \vec{f} = 0$$

Hraniční podmínky (eulerovsky): $\vec{n} \cdot \mathbf{t} = 0$

Hraniční podmínky (lagrangeovsky):

$$\frac{J^{-1}\vec{N} \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}^{(1)}}{\sqrt{\vec{N} \cdot \mathbf{B} \cdot \vec{N}}} = \frac{J^{-1}\vec{N} \cdot \mathbf{T}^{(1)}}{\sqrt{\vec{N} \cdot \mathbf{B} \cdot \vec{N}}} = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{N} \cdot \mathbf{T}^{(1)} = 0$$