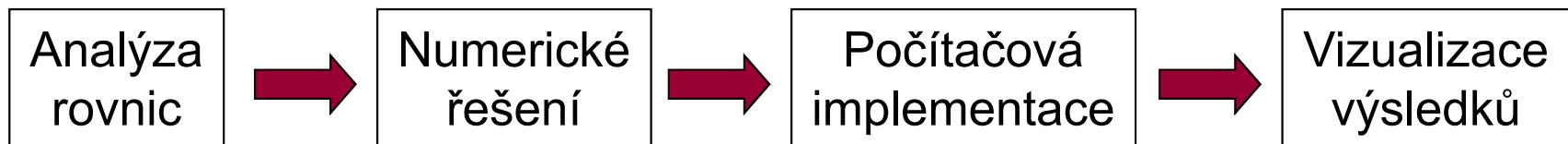
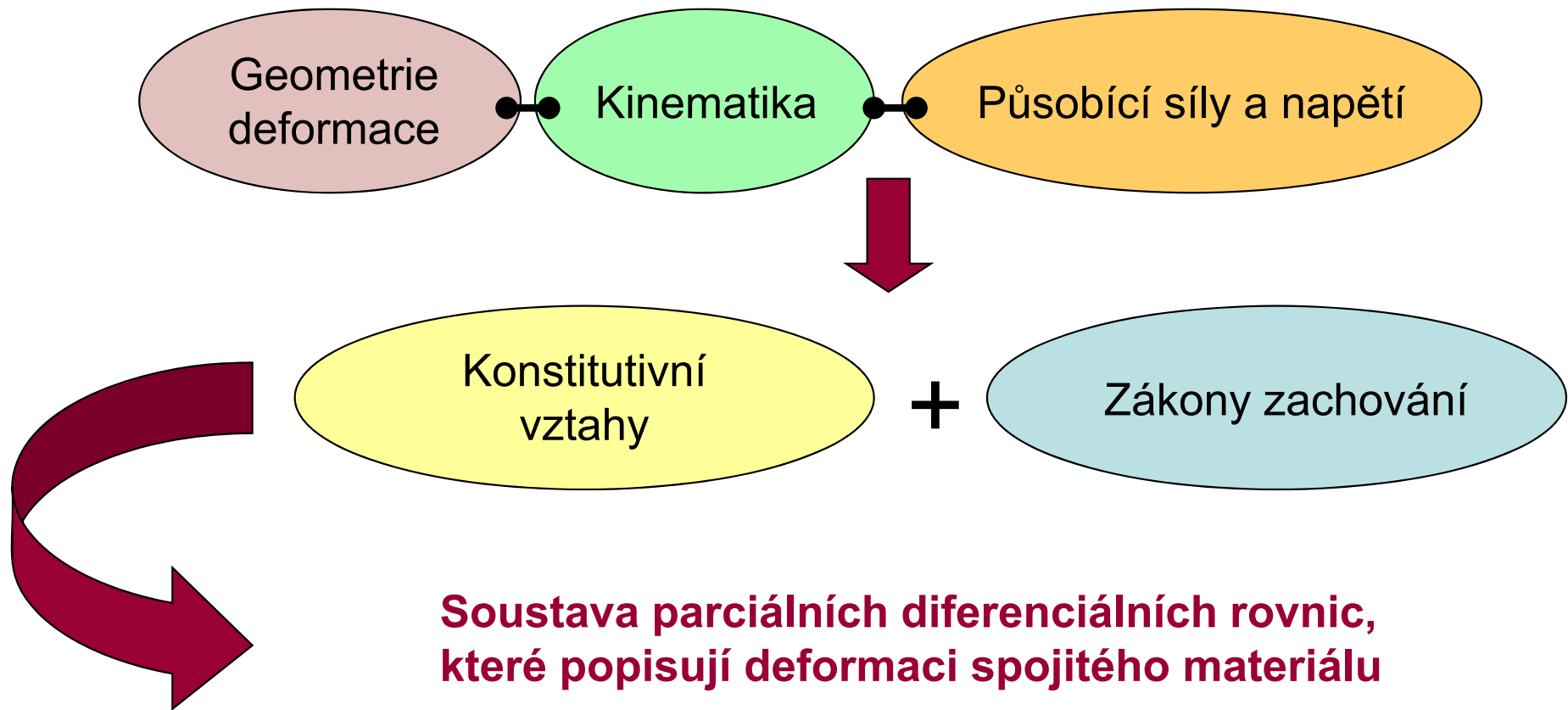
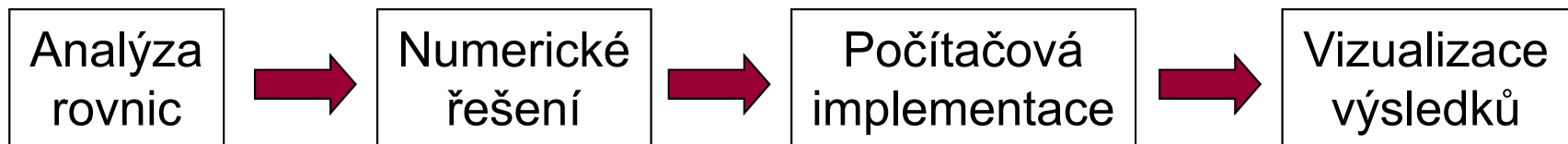
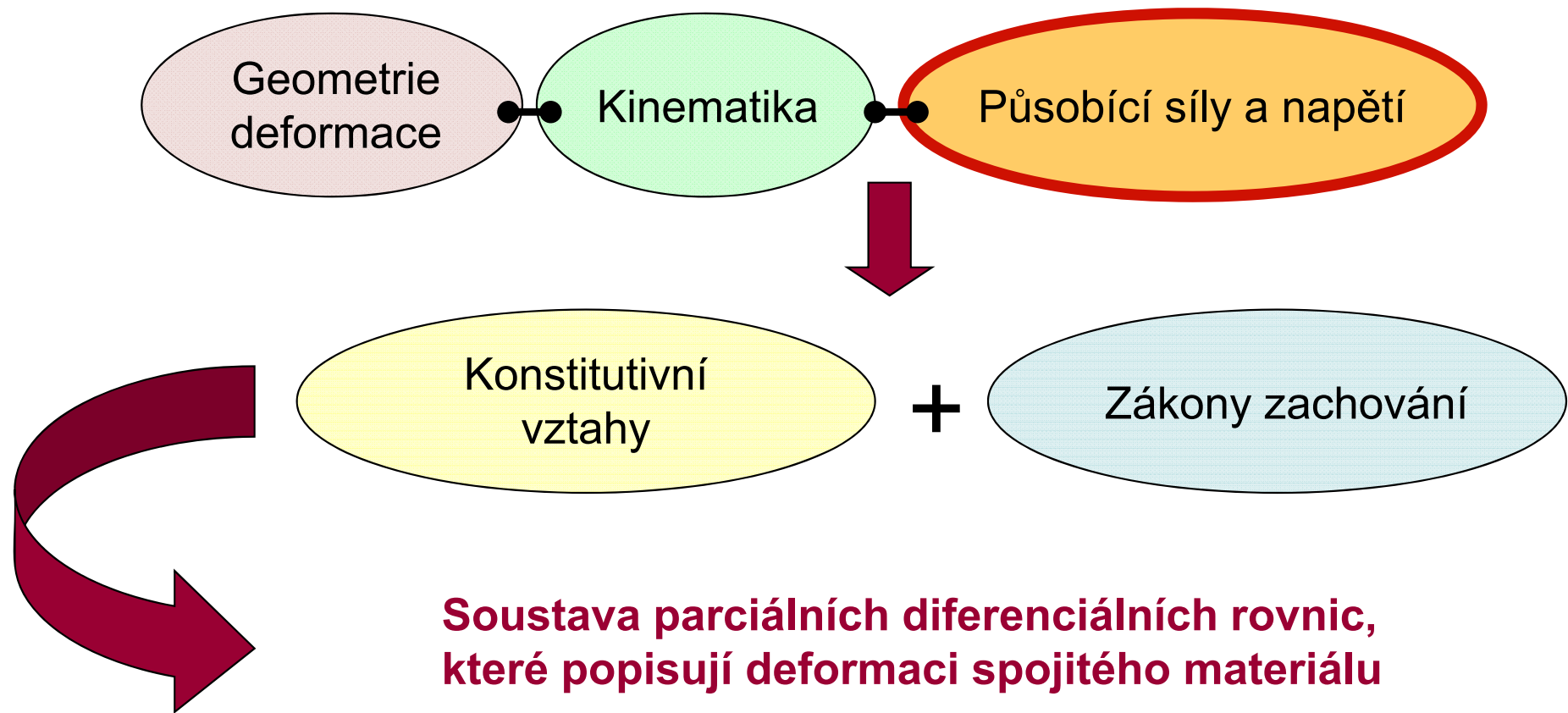


Mechanika kontinua – část 4
Síly a napětí



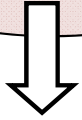


Geometrie
deformace

Kinematika

Působící síly a napětí

Geometrie
deformace

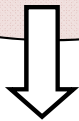


$$\vec{x} = \vec{\chi}(\vec{X}), \quad \vec{X} = \vec{\chi}^{-1}(\vec{x})$$

Kinematika

Působící síly a napětí

Geometrie
deformace



$$\vec{x} = \vec{\chi}(\vec{X}), \quad \vec{X} = \vec{\chi}^{-1}(\vec{x})$$

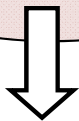
$$\mathbf{F} = (\text{Grad} \vec{\chi})^T, \quad \mathbf{F}^{-1}$$

$$\text{Grad} \bullet = \mathbf{F}^T \cdot \text{grad} \bullet, \text{ etc.}$$

Kinematika

Působící síly a napětí

Geometrie
deformace



$$\vec{x} = \vec{\chi}(\vec{X}), \quad \vec{X} = \vec{\chi}^{-1}(\vec{x})$$

$$\mathbf{F} = (\text{Grad} \vec{\chi})^T, \quad \mathbf{F}^{-1}$$

$$\text{Grad} \bullet = \mathbf{F}^T \cdot \text{grad} \bullet, \text{ etc.}$$

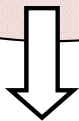
C, B, c, b, E, e, ...

změny délek, ploch a objemů

Kinematika

Působící síly a napětí

Geometrie
deformace



$$\vec{x} = \vec{\chi}(\vec{X}), \quad \vec{X} = \vec{\chi}^{-1}(\vec{x})$$

$$\mathbf{F} = (\text{Grad} \vec{\chi})^T, \quad \mathbf{F}^{-1}$$

$$\text{Grad} \bullet = \mathbf{F}^T \cdot \text{grad} \bullet, \text{ etc.}$$

C, B, c, b, E, e, ...

změny délek, ploch a objemů

posunutí $\vec{U}, \vec{u}$

$$\mathbf{H} = \text{Grad} \vec{U}$$

malé deformace

Kinematika

Působící síly a napětí

Geometrie
deformace



$$\vec{x} = \vec{\chi}(\vec{X}), \quad \vec{X} = \vec{\chi}^{-1}(\vec{x})$$

$$\mathbf{F} = (\text{Grad} \vec{\chi})^T, \quad \mathbf{F}^{-1}$$

$$\text{Grad } \bullet = \mathbf{F}^T \cdot \text{grad } \bullet, \text{ etc.}$$

$$\mathbf{C}, \mathbf{B}, \mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{E}, \mathbf{e}, \dots$$

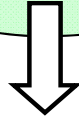
změny délek, ploch a objemů

$$\text{posunutí } \vec{U}, \vec{u}$$

$$\mathbf{H} = \text{Grad} \vec{U}$$

malé deformace

Kinematika



materiálová derivace

$$\frac{D\bullet}{Dt} = \begin{cases} \frac{\partial \bullet}{\partial t} \\ \frac{\partial \bullet}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad } \bullet \end{cases}$$

Působící síly a napětí

Geometrie
deformace



$$\vec{x} = \vec{\chi}(\vec{X}), \quad \vec{X} = \vec{\chi}^{-1}(\vec{x})$$

$$\mathbf{F} = (\text{Grad} \vec{\chi})^T, \quad \mathbf{F}^{-1}$$

$$\text{Grad } \bullet = \mathbf{F}^T \cdot \text{grad } \bullet, \text{ etc.}$$

$$\mathbf{C}, \mathbf{B}, \mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{E}, \mathbf{e}, \dots$$

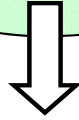
změny délek, ploch a objemů

posunutí $\vec{U}, \vec{u}$

$$\mathbf{H} = \text{Grad} \vec{U}$$

malé deformace

Kinematika



materiálová derivace

$$\frac{D\bullet}{Dt} = \begin{cases} \frac{\partial \bullet}{\partial t} \\ \frac{\partial \bullet}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad } \bullet \end{cases}$$

gradient rychlosti

$$\mathbf{l} = (\text{grad} \vec{v})^T$$

Působící síly a napětí

Geometrie
deformace



$$\vec{x} = \vec{\chi}(\vec{X}), \quad \vec{X} = \vec{\chi}^{-1}(\vec{x})$$

$$\mathbf{F} = (\text{Grad} \vec{\chi})^T, \quad \mathbf{F}^{-1}$$

$$\text{Grad } \bullet = \mathbf{F}^T \cdot \text{grad } \bullet, \text{ etc.}$$

$\mathbf{C}, \mathbf{B}, \mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{E}, \mathbf{e}, \dots$

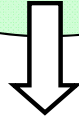
změny délek, ploch a objemů

posunutí $\vec{U}, \vec{u}$

$$\mathbf{H} = \text{Grad} \vec{U}$$

malé deformace

Kinematika



materiálová derivace

$$\frac{D\bullet}{Dt} = \begin{cases} \frac{\partial \bullet}{\partial t} \\ \frac{\partial \bullet}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad } \bullet \end{cases}$$

gradient rychlosti

$$\mathbf{l} = (\text{grad} \vec{v})^T$$

$$\dot{\mathbf{F}}, \dot{J}, d\vec{x}, d\vec{a}, dv, \dot{\vec{n}}, \dot{\mathbf{E}}, \dots$$

Působící síly a napětí

Geometrie deformace



$$\vec{x} = \vec{\chi}(\vec{X}), \quad \vec{X} = \vec{\chi}^{-1}(\vec{x})$$

$$\mathbf{F} = (\text{Grad} \vec{\chi})^T, \quad \mathbf{F}^{-1}$$

$$\text{Grad } \bullet = \mathbf{F}^T \cdot \text{grad } \bullet, \text{ etc.}$$

$$\mathbf{C}, \mathbf{B}, \mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{E}, \mathbf{e}, \dots$$

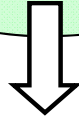
změny délek, ploch a objemů

$$\text{posunutí } \vec{U}, \vec{u}$$

$$\mathbf{H} = \text{Grad} \vec{U}$$

malé deformace

Kinematika



materiálová derivace

$$\frac{D\bullet}{Dt} = \begin{cases} \frac{\partial \bullet}{\partial t} \\ \frac{\partial \bullet}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad } \bullet \end{cases}$$

gradient rychlosti

$$\mathbf{l} = (\text{grad} \vec{v})^T$$

$$\dot{\mathbf{F}}, \dot{J}, d\vec{x}, d\vec{a}, dv, \dot{\vec{n}}, \dot{\mathbf{E}}, \dots$$

Reynoldsov transportní teorém

$$\frac{D}{Dt} \int_{v(t)} \phi dv = \int_{v(t)} \left(\frac{D\phi}{Dt} + \phi \text{div } \vec{v} \right) dv$$

Působící síly a napětí

Geometrie deformace



$$\vec{x} = \vec{\chi}(\vec{X}), \quad \vec{X} = \vec{\chi}^{-1}(\vec{x})$$

$$\mathbf{F} = (\text{Grad} \vec{\chi})^T, \quad \mathbf{F}^{-1}$$

$$\text{Grad } \bullet = \mathbf{F}^T \cdot \text{grad } \bullet, \text{ etc.}$$

$$\mathbf{C}, \mathbf{B}, \mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{E}, \mathbf{e}, \dots$$

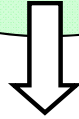
změny délek, ploch a objemů

$$\text{posunutí } \vec{U}, \vec{u}$$

$$\mathbf{H} = \text{Grad} \vec{U}$$

malé deformace

Kinematika



materiálová derivace

$$\frac{D\bullet}{Dt} = \begin{cases} \frac{\partial \bullet}{\partial t} \\ \frac{\partial \bullet}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad } \bullet \end{cases}$$

gradient rychlosti

$$\mathbf{l} = (\text{grad} \vec{v})^T$$

$$\dot{\mathbf{F}}, \dot{J}, d\vec{x}, d\vec{a}, dv, \dot{\vec{n}}, \dot{\mathbf{E}}, \dots$$

Reynoldsův transportní teorém

$$\frac{D}{Dt} \int_{v(t)} \phi dv = \int_{v(t)} \left(\frac{D\phi}{Dt} + \phi \text{div } \vec{v} \right) dv$$

Působící síly a napětí



Vyjdeme z pohybových zákonů, které postulovali Newton a Euler, a použijeme je k odvození vztahů pro síly uvnitř spojitého prostředí.

Geometrie deformace



$$\vec{x} = \vec{\chi}(\vec{X}), \quad \vec{X} = \vec{\chi}^{-1}(\vec{x})$$

$$\mathbf{F} = (\text{Grad} \vec{\chi})^T, \quad \mathbf{F}^{-1}$$

$$\text{Grad } \bullet = \mathbf{F}^T \cdot \text{grad } \bullet, \text{ etc.}$$

$$\mathbf{C}, \mathbf{B}, \mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{E}, \mathbf{e}, \dots$$

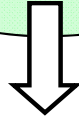
změny délek, ploch a objemů

$$\text{posunutí } \vec{U}, \vec{u}$$

$$\mathbf{H} = \text{Grad} \vec{U}$$

malé deformace

Kinematika



materiálová derivace

$$\frac{D\bullet}{Dt} = \begin{cases} \frac{\partial \bullet}{\partial t} \\ \frac{\partial \bullet}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad } \bullet \end{cases}$$

gradient rychlosti

$$\mathbf{l} = (\text{grad} \vec{v})^T$$

$$\dot{\mathbf{F}}, \dot{J}, d\vec{x}, d\vec{a}, dv, \dot{\vec{n}}, \dot{\mathbf{E}}, \dots$$

Reynoldsův transportní teorém

$$\frac{D}{Dt} \int_{v(t)} \phi dv = \int_{v(t)} \left(\frac{D\phi}{Dt} + \phi \text{div } \vec{v} \right) dv$$

Působící síly a napětí



Vyjdeme z pohybových zákonů, které postulovali Newton a Euler, a použijeme je k odvození vztahů pro síly uvnitř spojitého prostředí.

$$\vec{t}_{(\vec{n})} = \vec{n} \cdot \mathbf{t}$$

vektor napětí
(trakce)

Cauchyho
tenzor napětí

Geometrie deformace



$$\vec{x} = \vec{\chi}(\vec{X}), \quad \vec{X} = \vec{\chi}^{-1}(\vec{x})$$

$$\mathbf{F} = (\text{Grad} \vec{\chi})^T, \quad \mathbf{F}^{-1}$$

$$\text{Grad} \bullet = \mathbf{F}^T \cdot \text{grad} \bullet, \text{ etc.}$$

$$\mathbf{C}, \mathbf{B}, \mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{E}, \mathbf{e}, \dots$$

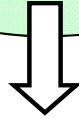
změny délek, ploch a objemů

$$\text{posunutí } \vec{U}, \vec{u}$$

$$\mathbf{H} = \text{Grad} \vec{U}$$

malé deformace

Kinematika



materiálová derivace

$$\frac{D\bullet}{Dt} = \begin{cases} \frac{\partial \bullet}{\partial t} \\ \frac{\partial \bullet}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad} \bullet \end{cases}$$

gradient rychlosti

$$\mathbf{l} = (\text{grad} \vec{v})^T$$

$$\dot{\mathbf{F}}, \dot{J}, d\vec{x}, d\vec{a}, dv, \dot{\vec{n}}, \dot{\mathbf{E}}, \dots$$

Reynoldsov transportní teorém

$$\frac{D}{Dt} \int_{v(t)} \phi dv = \int_{v(t)} \left(\frac{D\phi}{Dt} + \phi \text{div} \vec{v} \right) dv$$

Působící síly a napětí



Vyjdeme z pohybových zákonů, které postulovali Newton a Euler, a použijeme je k odvození vztahů pro síly uvnitř spojitého prostředí.

$$\vec{t}_{(\vec{n})} = \vec{n} \cdot \mathbf{t}$$

vektor napětí
(trakce)

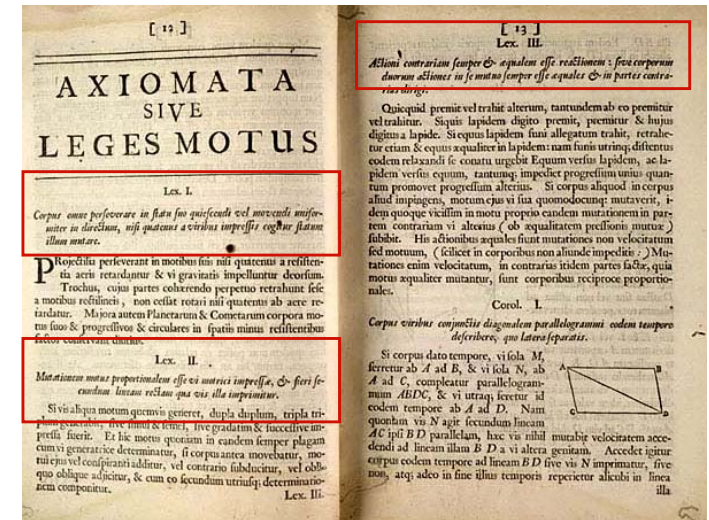
Cauchyho
tenzor napětí

Problém: Jak formulovat pohybový zákon v referenční konfiguraci?

→ První a druhý Piola-Kirchhoffův tenzor

Newtonovy pohybové zákony (1687)

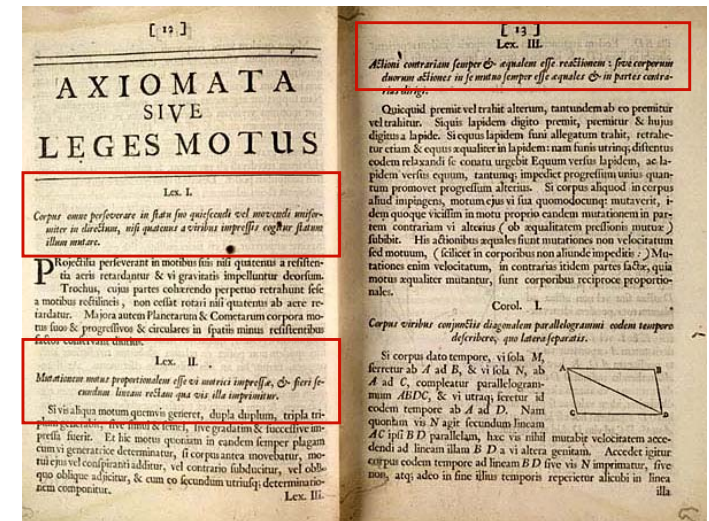
1



Newtonovy pohybové zákony (1687)

1

1. Jestliže na těleso nepůsobí žádné vnější síly nebo výslednice sil je nulová, pak těleso setrvává v klidu nebo v rovnoměrném přímočarém pohybu.

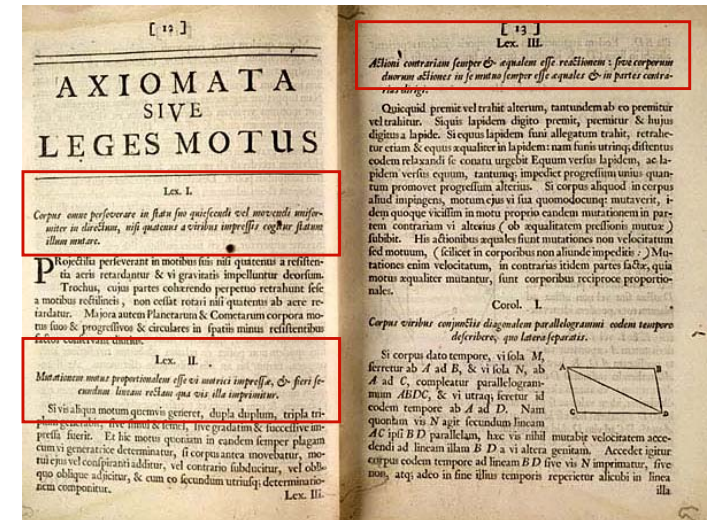


Newtonovy pohybové zákony (1687)

1

1. Jestliže na těleso nepůsobí žádné vnější síly nebo výslednice sil je nulová, pak těleso setrvává v klidu nebo v rovnoměrném přímočarém pohybu.
2. Jestliže na těleso působí síla, pak se těleso pohybuje se zrychlením, které je přímo úměrné působící síle a nepřímo úměrné hmotnosti tělesa.

$$\vec{F} = m\vec{a}$$



Newtonovy pohybové zákony (1687)

1

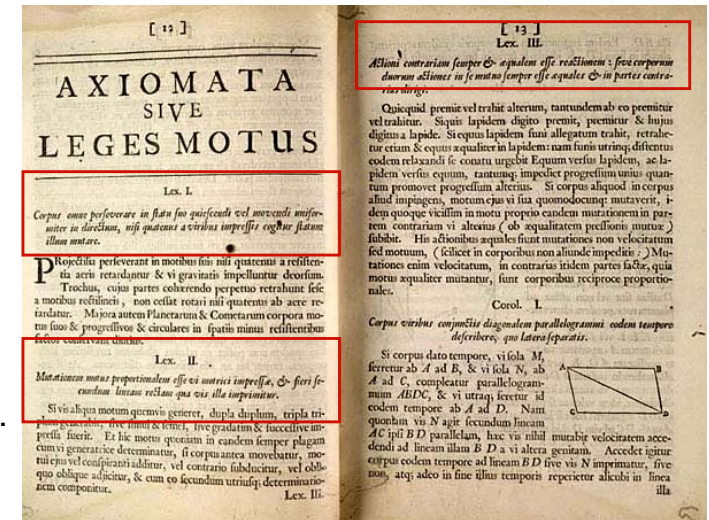
1. Jestliže na těleso nepůsobí žádné vnější síly nebo výslednice sil je nulová, pak těleso setrvává v klidu nebo v rovnoměrném přímočarém pohybu.

2. Jestliže na těleso působí síla, pak se těleso pohybuje se zrychlením, které je přímo úměrné působící síle a nepřímo úměrné hmotnosti tělesa.

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

3. Proti každé akci vždy působí stejná reakce; jinak řečeno: vzájemná působení dvou těles jsou vždy stejně velká a míří na opačné strany.

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$



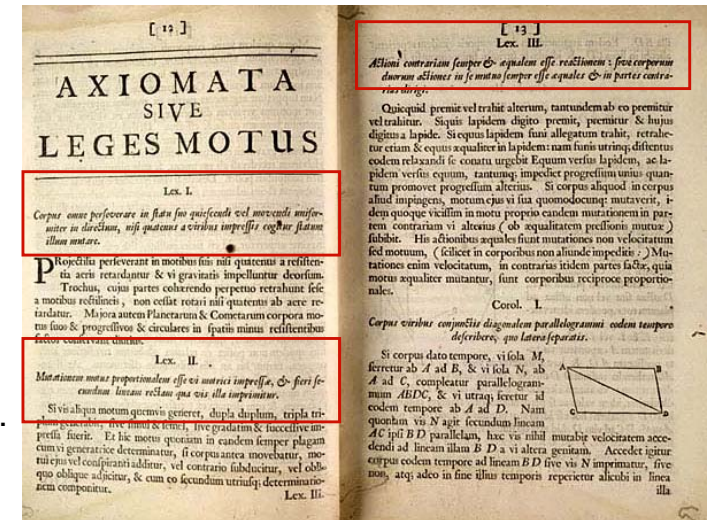
Newtonovy pohybové zákony (1687)

1. Jestliže na těleso nepůsobí žádné vnější síly nebo výslednice sil je nulová, pak těleso setrvává v klidu nebo v rovnoměrném přímočarém pohybu.
2. Jestliže na těleso působí síla, pak se těleso pohybuje se zrychlením, které je přímo úměrné působící síle a nepřímo úměrné hmotnosti tělesa.

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

3. Proti každé akci vždy působí stejná reakce; jinak řečeno: vzájemná působení dvou těles jsou vždy stejně velká a míří na opačné strany.

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$



Eulerovy pohybové zákony (impulsové věty, ~1740)

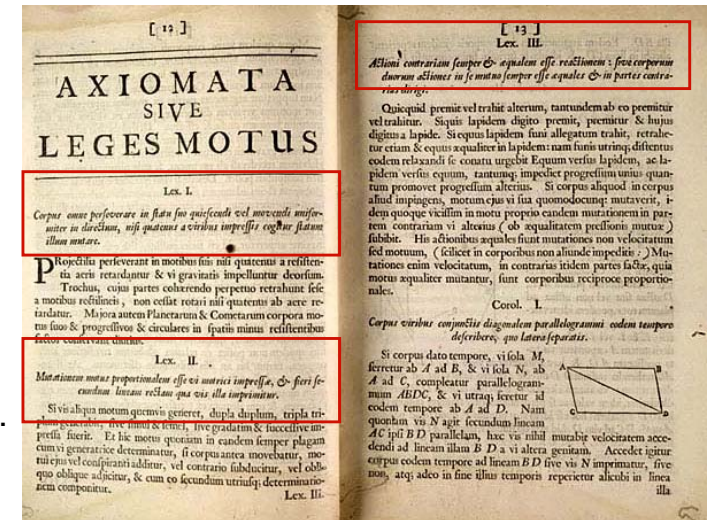
Newtonovy pohybové zákony (1687)

1. Jestliže na těleso nepůsobí žádné vnější síly nebo výslednice sil je nulová, pak těleso setrvává v klidu nebo v rovnoměrném přímočarém pohybu.
2. Jestliže na těleso působí síla, pak se těleso pohybuje se zrychlením, které je přímo úměrné působící síle a nepřímo úměrné hmotnosti tělesa.

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

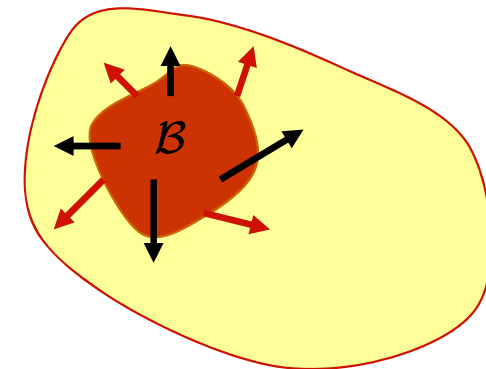
3. Proti každé akci vždy působí stejná reakce; jinak řečeno: vzájemná působení dvou těles jsou vždy stejně velká a míří na opačné strany.

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$



Eulerovy pohybové zákony (impulsové věty, ~1740)

- ← povrchové (kontaktní) síly
- ← objemové síly



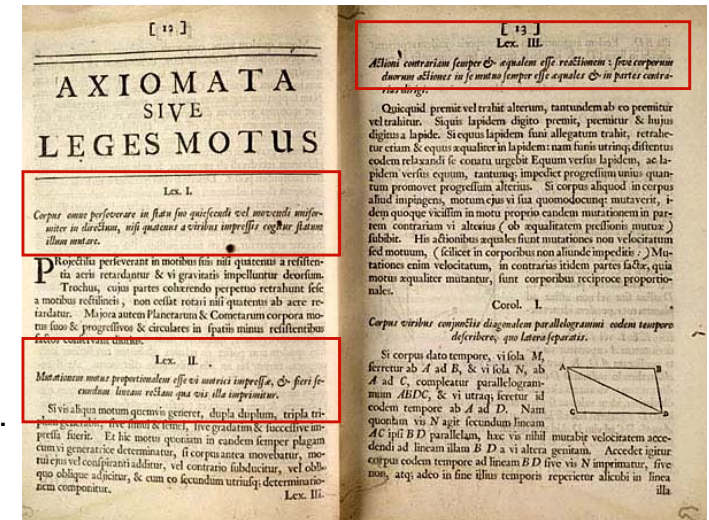
Newtonovy pohybové zákony (1687)

1. Jestliže na těleso nepůsobí žádné vnější síly nebo výslednice sil je nulová, pak těleso setrvává v klidu nebo v rovnoměrném přímočarém pohybu.
2. Jestliže na těleso působí síla, pak se těleso pohybuje se zrychlením, které je přímo úměrné působící síle a nepřímo úměrné hmotnosti tělesa.

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

3. Proti každé akci vždy působí stejná reakce; jinak řečeno: vzájemná působení dvou těles jsou vždy stejně velká a míří na opačné strany.

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

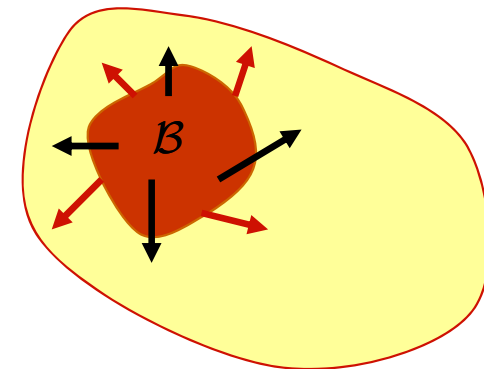


Eulerovy pohybové zákony (impulsové věty, ~1740)

1. V inerciální soustavě je časová změna hybnosti libovolné části tělesa rovna celkové síle, působící na tuto část.

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}(\mathcal{B}) \quad \text{nebo jinak} \quad \frac{d}{dt} \int_{v(t)} \rho \vec{v} dv = \int_{s(t)} \vec{g} da + \int_{v(t)} \vec{f} dv$$

← povrchové (kontaktní) síly
 ← objemové síly



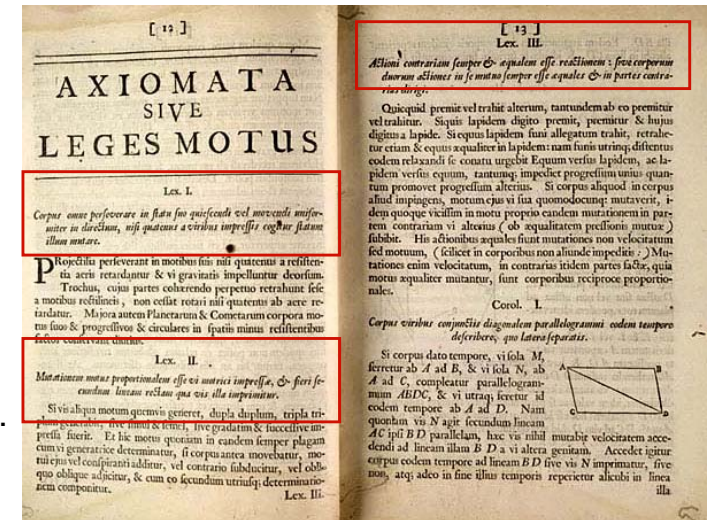
Newtonovy pohybové zákony (1687)

1. Jestliže na těleso nepůsobí žádné vnější síly nebo výslednice sil je nulová, pak těleso setrvává v klidu nebo v rovnoměrném přímočarém pohybu.
2. Jestliže na těleso působí síla, pak se těleso pohybuje se zrychlením, které je přímo úměrné působící síle a nepřímo úměrné hmotnosti tělesa.

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

3. Proti každé akci vždy působí stejná reakce; jinak řečeno: vzájemná působení dvou těles jsou vždy stejně velká a míří na opačné strany.

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$



Eulerovy pohybové zákony (impulsové věty, ~1740)

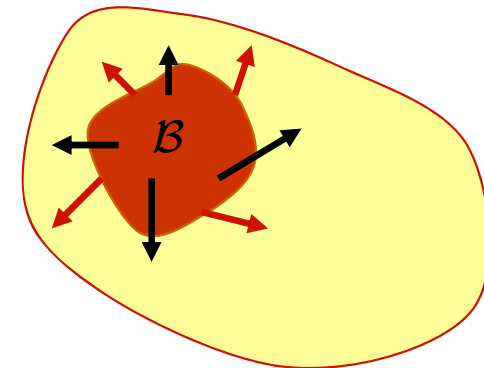
1. V inerciální soustavě je časová změna hybnosti libovolné části tělesa rovna celkové síle, působící na tuto část.

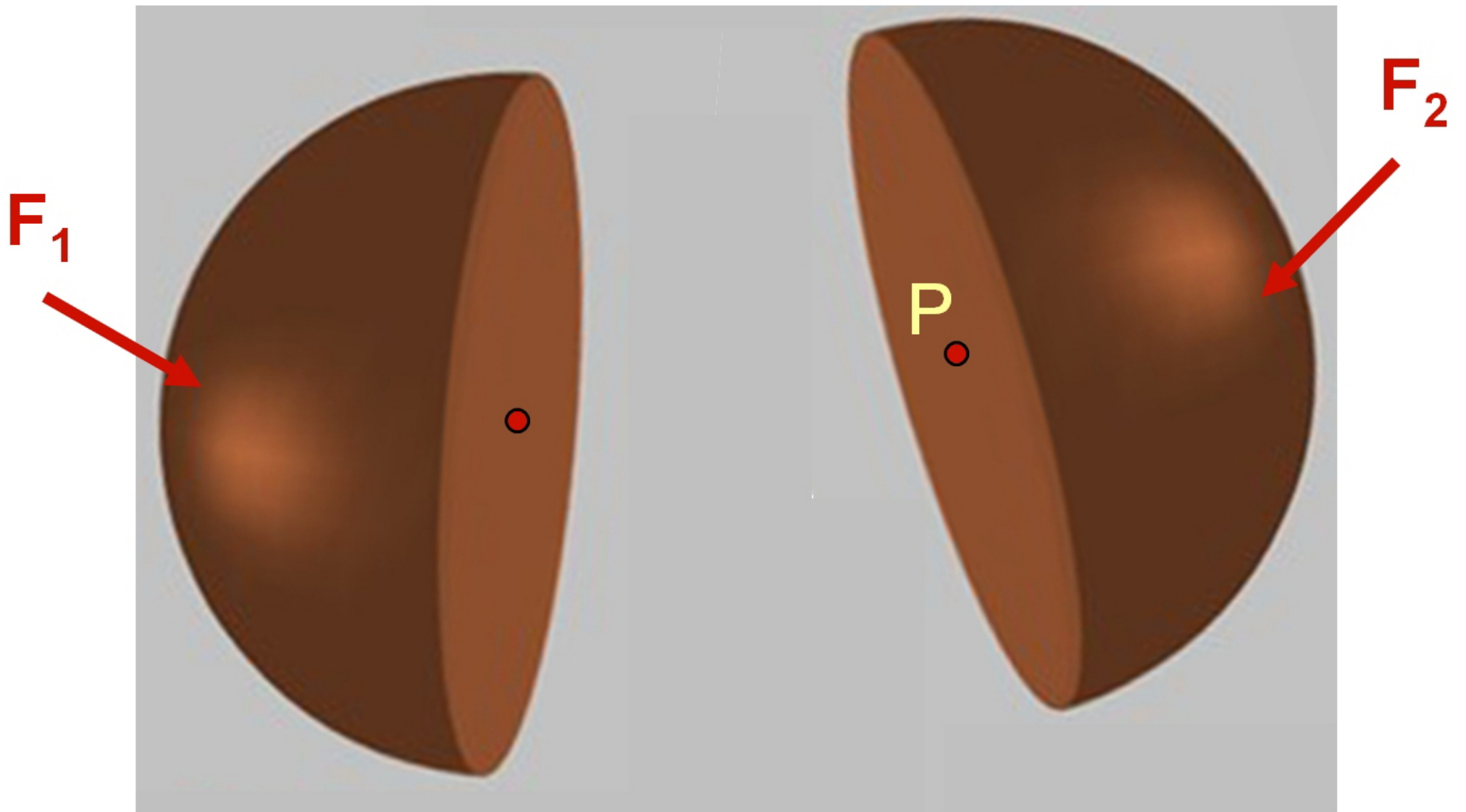
$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}(\mathcal{B}) \quad \text{nebo jinak} \quad \frac{d}{dt} \int_{v(t)} \rho \vec{v} dv = \int_{s(t)} \vec{g} da + \int_{v(t)} \vec{f} dv$$

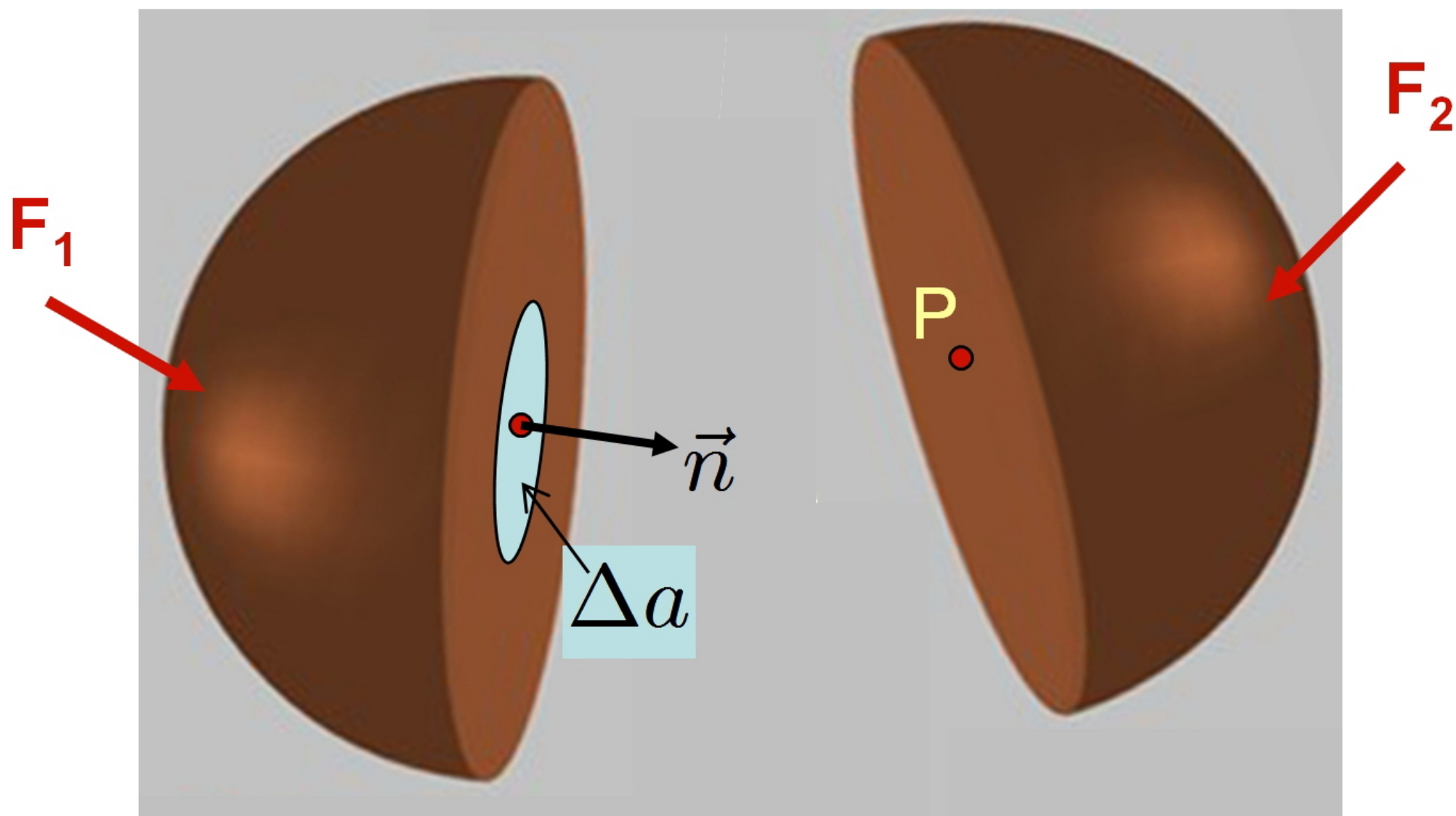
← povrchové (kontaktní) síly
← objemové síly

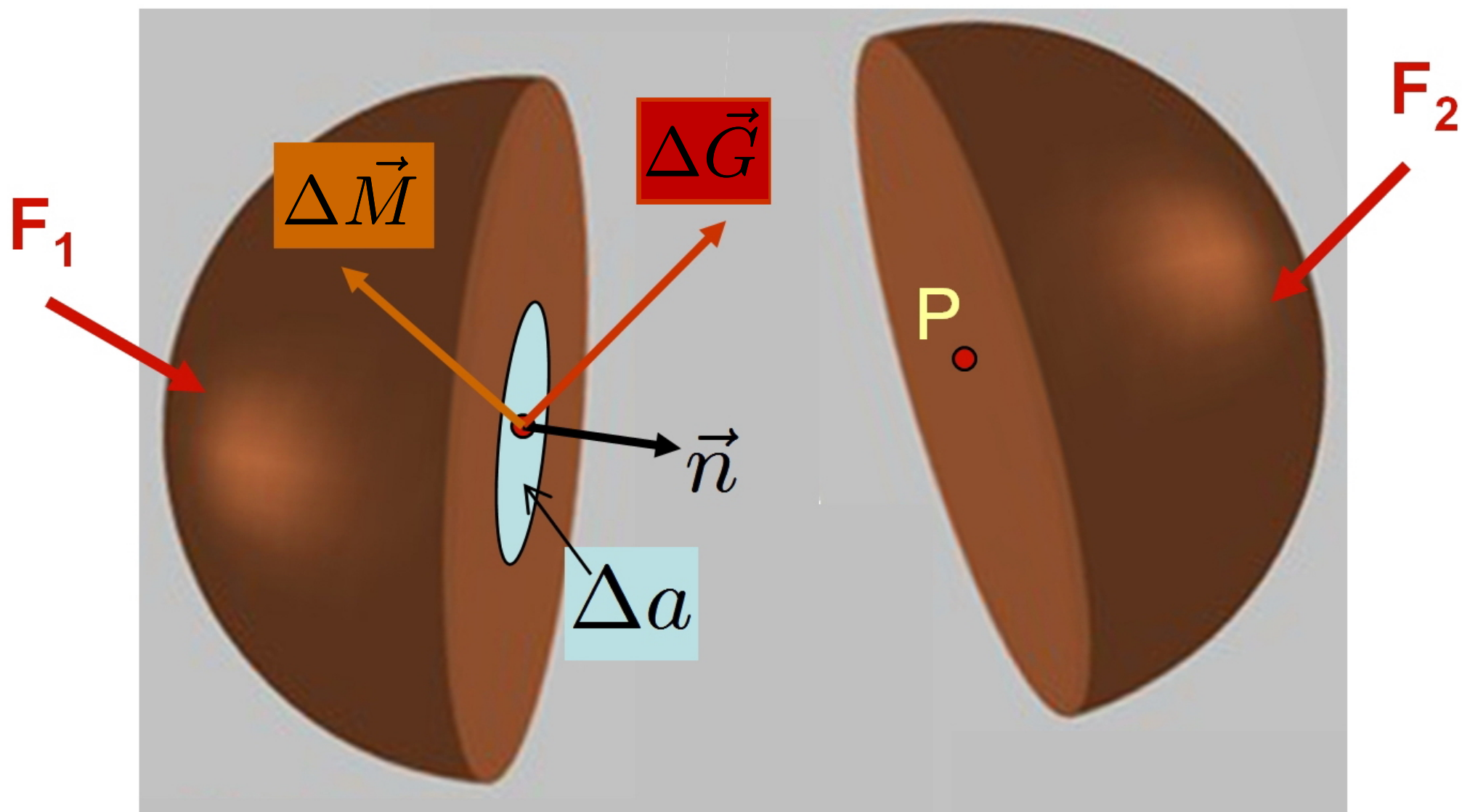
2. V inerciální soustavě je časová změna momentu hybnosti libovolné části tělesa rovna celkovému momentu sil, působící na tuto část.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}(\mathcal{B}), \quad \frac{d}{dt} \int_{v(t)} \vec{r} \times \rho \vec{v} dv = \int_{s(t)} \vec{r} \times \vec{g} da + \int_{v(t)} \vec{r} \times \vec{f} dv$$



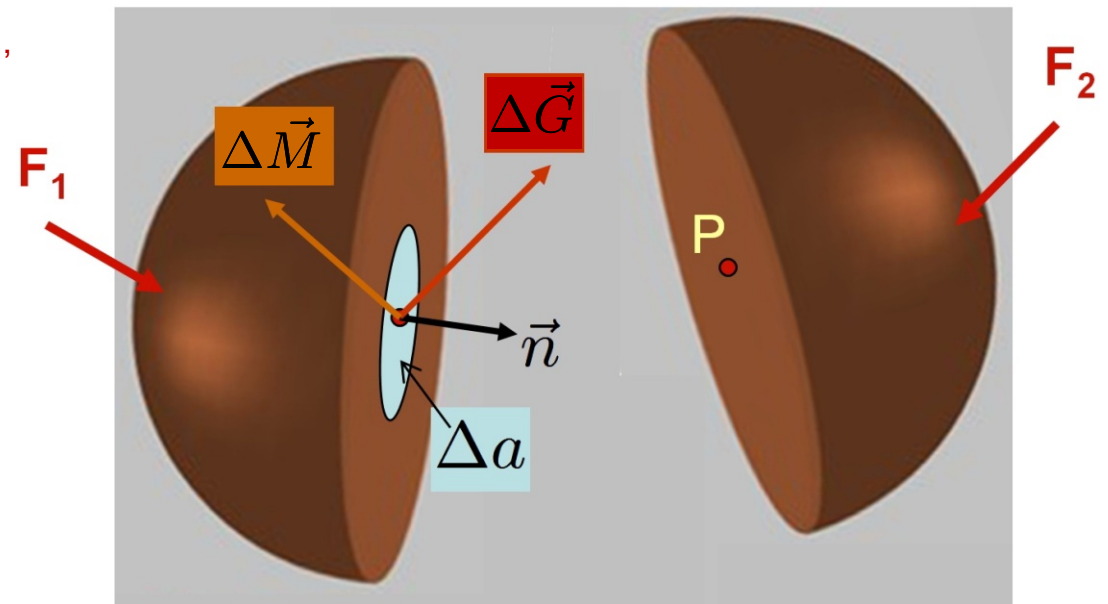






Cauchyho (Euler-Cauchyho) napěťový princip

Uvažujme libovolný (reálný nebo imaginární) povrch, který rozděluje těleso na dvě části. **Vzájemné působení těchto částí je ekvivalentní soustavě sil a jejich momentů, působících na uvažované ploše.**



Cauchyho (Euler-Cauchyho) napěťový princip

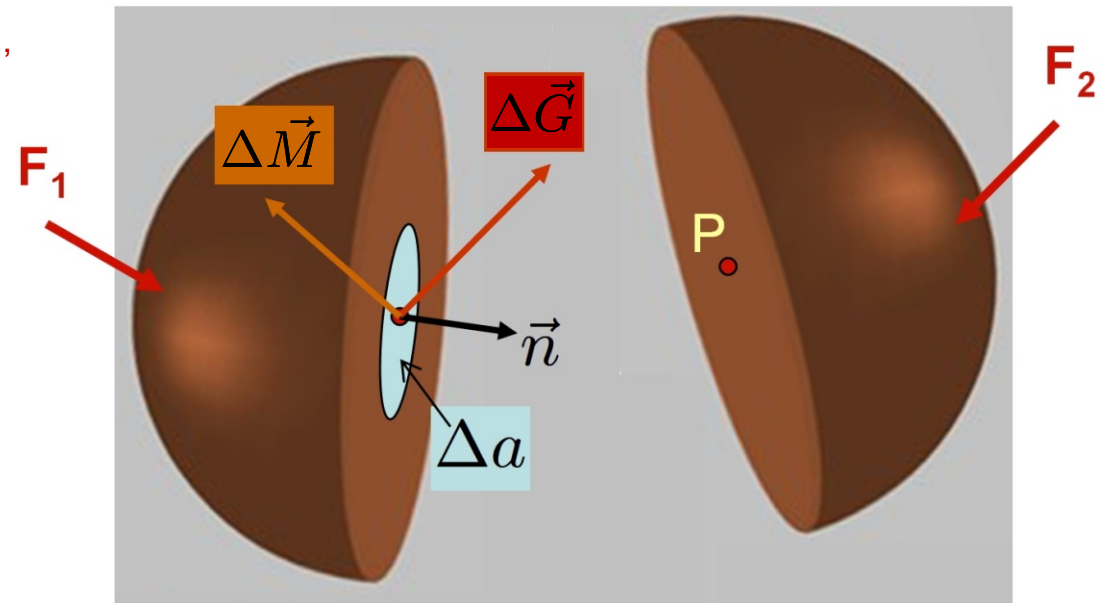
Uvažujme libovolný (reálný nebo imaginární) povrch, který rozděluje těleso na dvě části. **Vzájemné působení těchto částí je ekvivalentní soustavě sil a jejich momentů, působících na uvažované ploše.**

střední hodnota napětí

$$\lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{G}}{\Delta a} = ???$$

střední hodnota momentu síly

$$\lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{M}}{\Delta a} = ???$$



Cauchyho (Euler-Cauchyho) napěťový princip

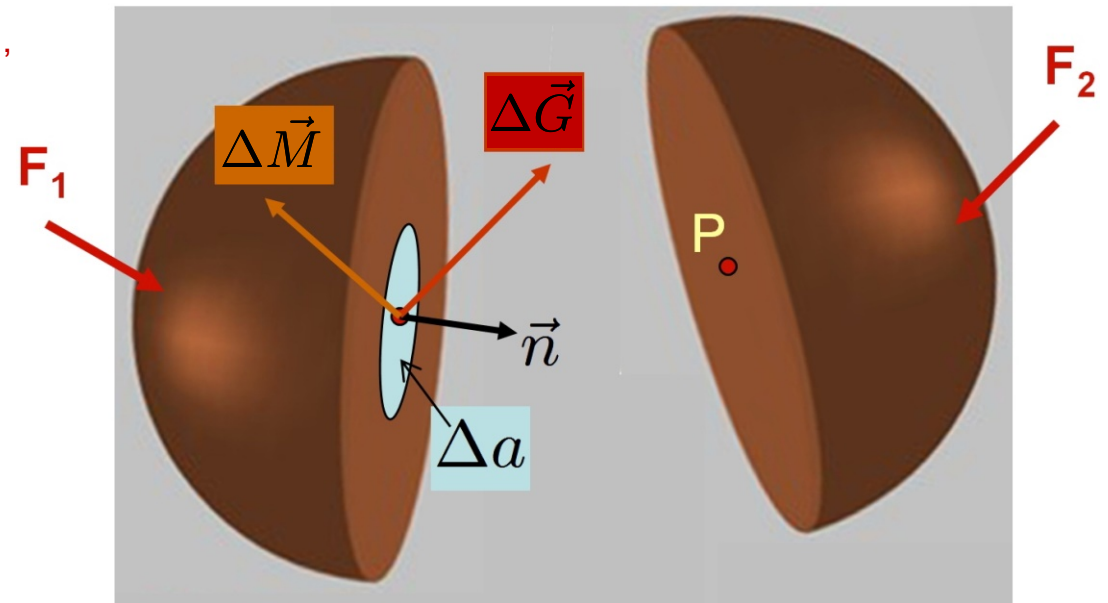
Uvažujme libovolný (reálný nebo imaginární) povrch, který rozděluje těleso na dvě části. **Vzájemné působení těchto částí je ekvivalentní soustavě sil a jejich momentů, působících na uvažované ploše.**

střední hodnota napětí

$$\lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{G}}{\Delta a} =: \vec{t}_{(\vec{n})}$$

střední hodnota momentu síly

$$\lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{M}}{\Delta a} = 0$$



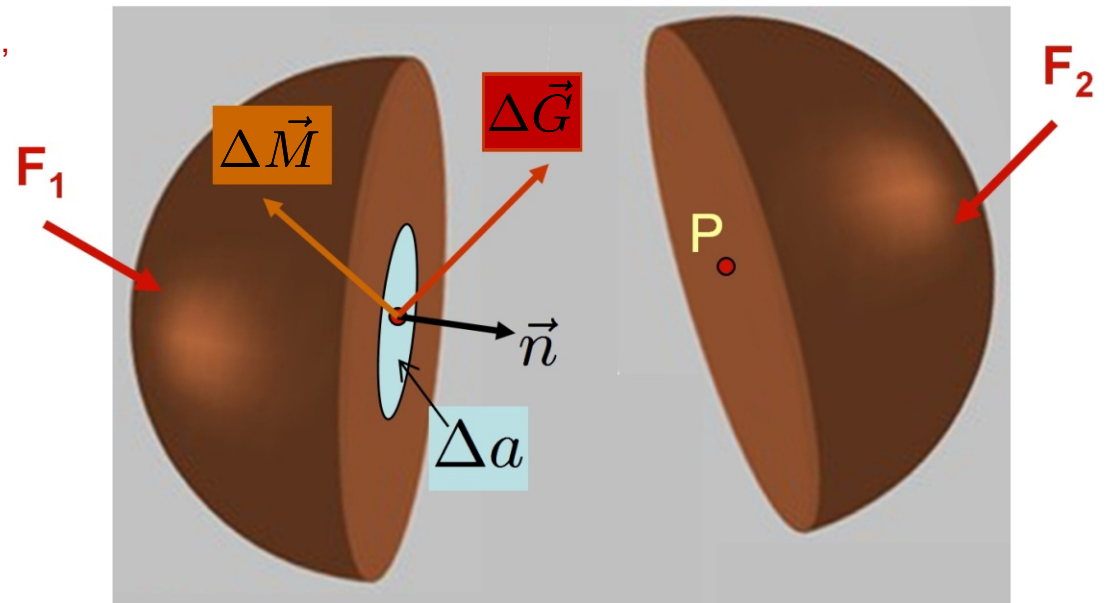
Cauchyho (Euler-Cauchyho) napěťový princip

Uvažujme libovolný (reálný nebo imaginární) povrch, který rozděluje těleso na dvě části. **Vzájemné působení těchto částí je ekvivalentní soustavě sil a jejich momentů, působících na uvažované ploše.**

$$\Delta \vec{G} = \vec{t}_{(\vec{n})} \Delta a$$

↑
střední hodnota *napětí*:
Cauchyho trakční vektor

$$\lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{G}}{\Delta a} =: \vec{t}_{(\vec{n})} \quad \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{M}}{\Delta a} = 0$$



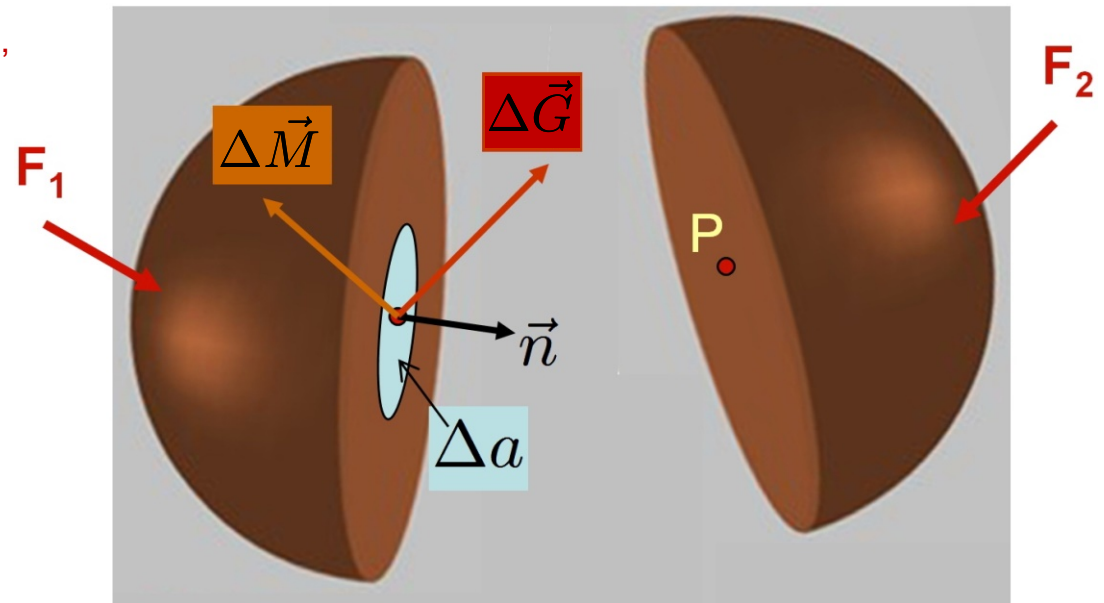
Cauchyho (Euler-Cauchyho) napěťový princip

Uvažujme libovolný (reálný nebo imaginární) povrch, který rozděljuje těleso na dvě části. **Vzájemné působení těchto částí je ekvivalentní soustavě sil a jejich momentů, působících na uvažované ploše.**

$$\Delta \vec{G} = \vec{t}_{(\vec{n})} \Delta a$$

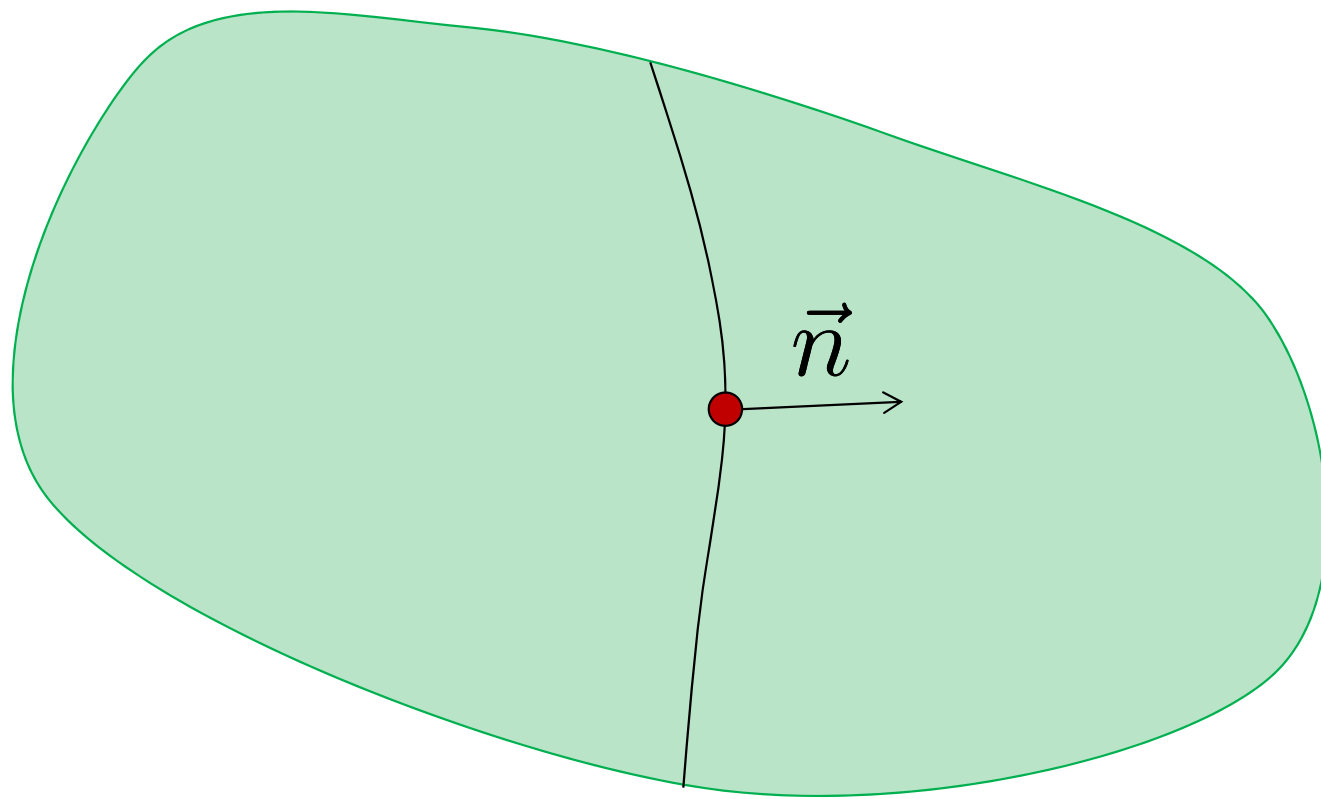
↑
střední hodnota *napětí*:
Cauchyho trakční vektor

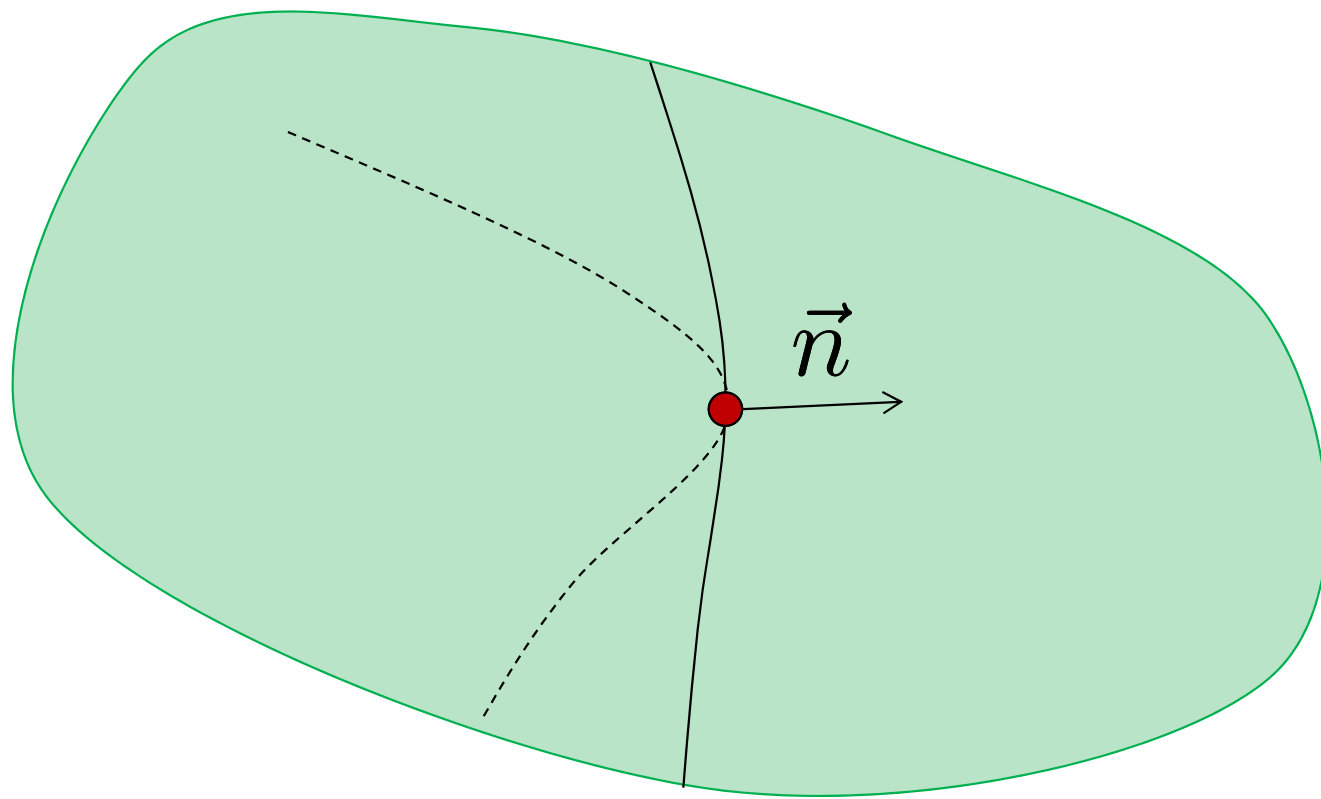
$$\lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{G}}{\Delta a} =: \vec{t}_{(\vec{n})} \quad \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{M}}{\Delta a} = 0$$

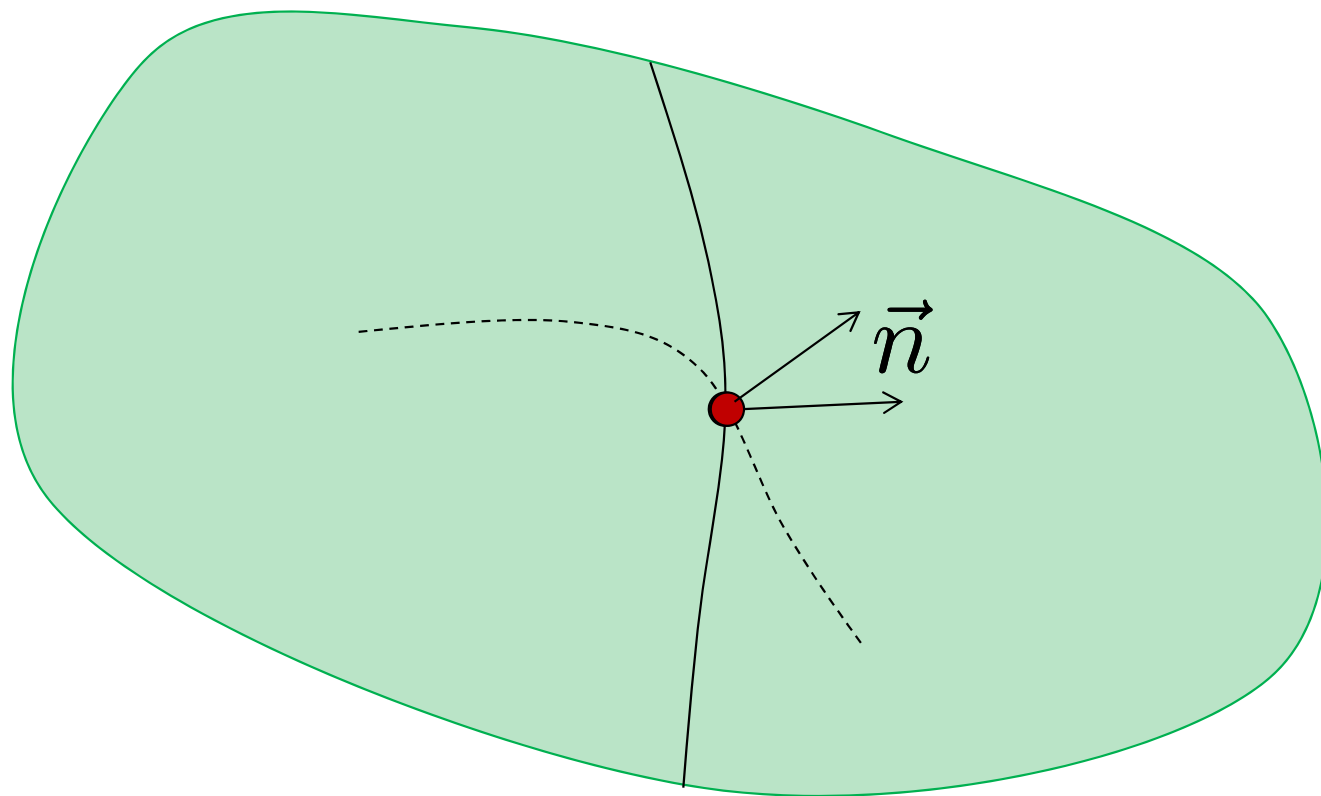


Cauchyho postulát

Napěťový vektor $\vec{t}_{(\vec{n})}$ je stejný pro všechny možné povrchy procházející bodem P , které mají stejnou normálu $\vec{n}$, tj. charakterizované stejnou tečnou rovinou v bodě P . **Napěťový vektor je tedy dán pouze normálou v daném bodě a není ovlivněn křivostí povrchu.**







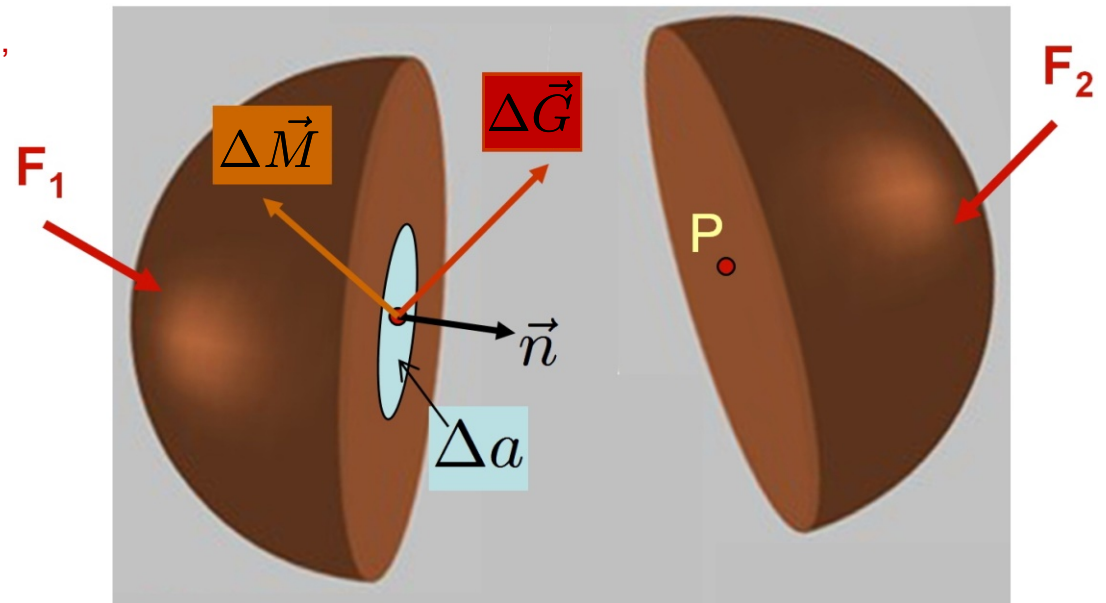
Cauchyho (Euler-Cauchyho) napěťový princip

Uvažujme libovolný (reálný nebo imaginární) povrch, který rozděljuje těleso na dvě části. **Vzájemné působení těchto částí je ekvivalentní soustavě sil a jejich momentů, působících na uvažované ploše.**

$$\Delta \vec{G} = \vec{t}_{(\vec{n})}^* \Delta a$$

↑
střední hodnota *napětí*:
Cauchyho trakční vektor

$$\lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{G}}{\Delta a} =: \vec{t}_{(\vec{n})} \quad \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{M}}{\Delta a} = 0$$



Cauchyho postulát

Napěťový vektor $\vec{t}_{(\vec{n})}$ je stejný pro všechny možné povrchy procházející bodem P, které mají stejnou normálu $\vec{n}$, tj. charakterizované stejnou tečnou rovinou v bodě P. **Napěťový vektor je tedy dán pouze normálou v daném bodě a není ovlivněn křivostí povrchu.**

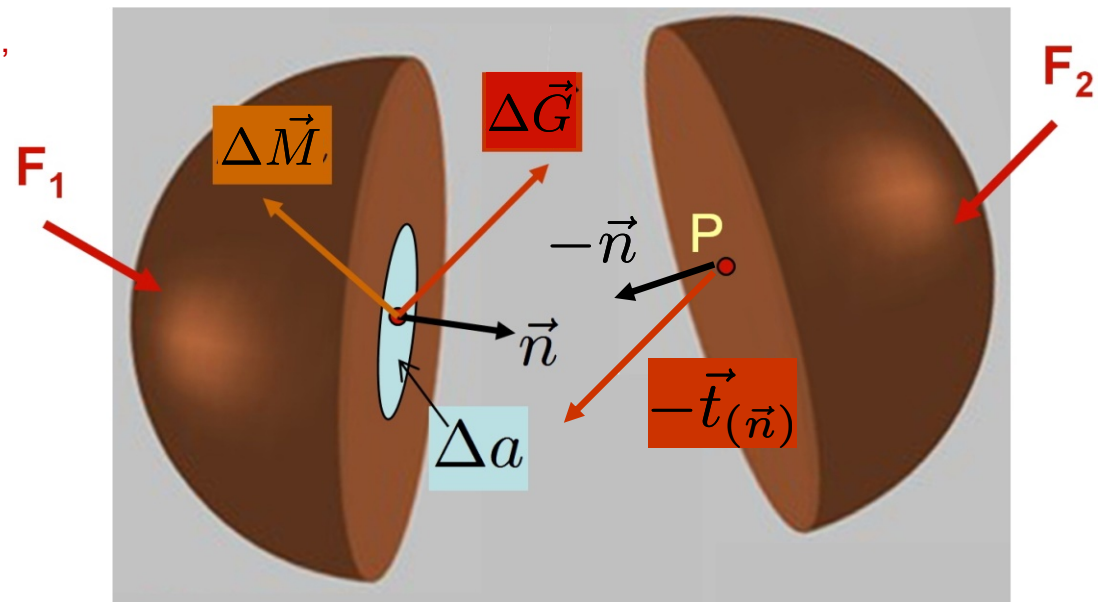
Cauchyho (Euler-Cauchyho) napěťový princip

Uvažujme libovolný (reálný nebo imaginární) povrch, který rozděluje těleso na dvě části. **Vzájemné působení těchto částí je ekvivalentní soustavě sil a jejich momentů, působících na uvažované ploše.**

$$\Delta \vec{G} = \vec{t}_{(\vec{n})}^* \Delta a$$

↑
střední hodnota *napětí*:
Cauchyho trakční vektor

$$\lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{G}}{\Delta a} =: \vec{t}_{(\vec{n})} \quad \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{M}}{\Delta a} = 0$$



Cauchyho postulát

Napěťový vektor $\vec{t}_{(\vec{n})}$ je stejný pro všechny možné povrchy procházející bodem P, které mají stejnou normálu $\vec{n}$, tj. charakterizované stejnou tečnou rovinou v bodě P. **Napěťový vektor je tedy dán pouze normálou v daném bodě a není ovlivněn křivostí povrchu.**

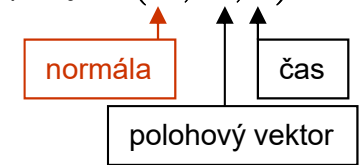
Cauchyho fundamentální lemma (Cauchyho reciproční teorém)

$$\vec{t}_{(-\vec{n})} = -\vec{t}_{(\vec{n})}$$

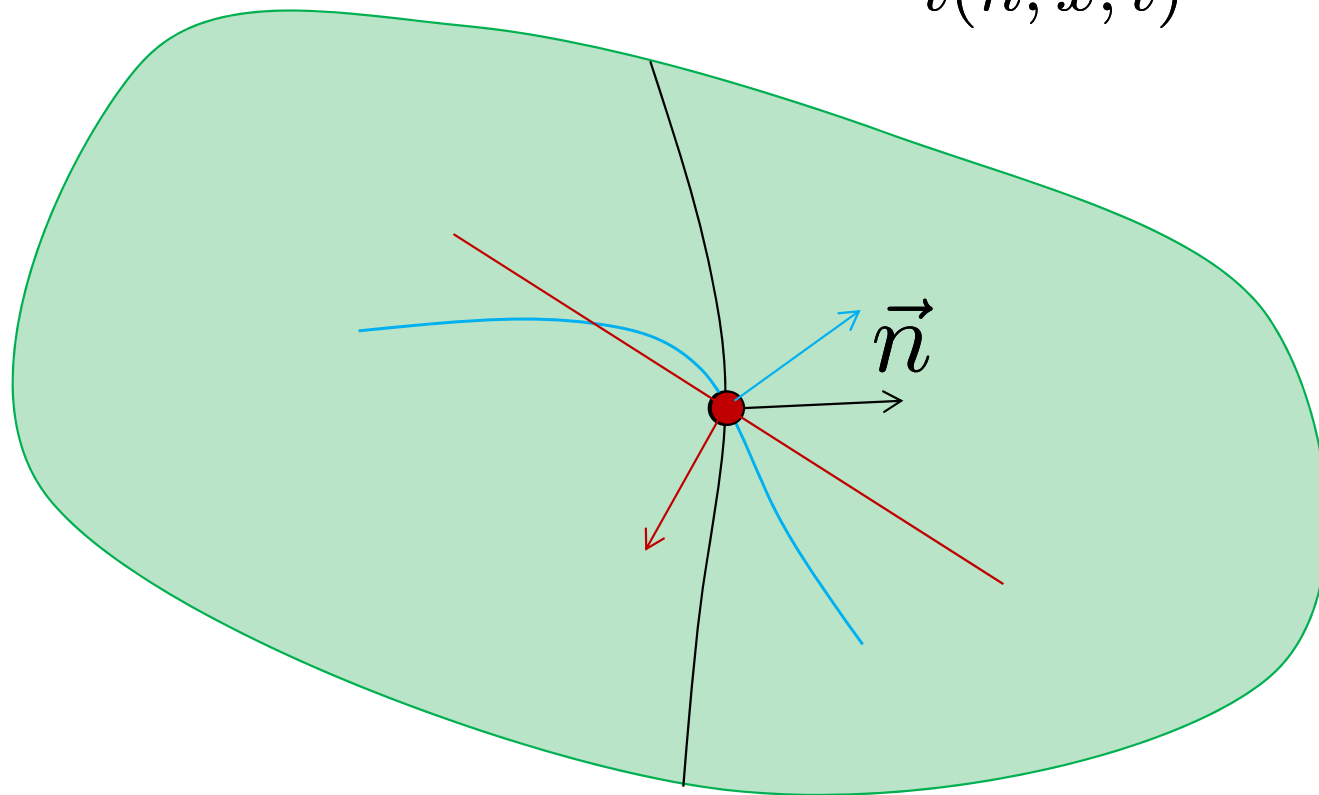
← analogie třetího Newtonova zákona

Stav napjatosti tělesa v daném čase může být tedy charakterizován polem hustoty plošné (kontaktní) síly $\vec{t}(\vec{n}, \vec{x}, t)$.

Na první pohled je tedy napětí v daném bodě určeno nekonečně mnoha hodnotami vektoru $\vec{t}(\vec{n})$, neboť daným bodem lze proložit nekonečně mnoho různých rovin.

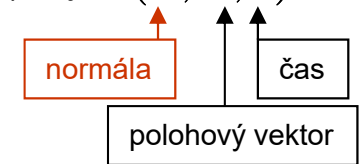


$$\vec{t}(\vec{n}, \vec{x}, t)$$



Stav napjatosti tělesa v daném čase může být tedy charakterizován polem hustoty plošné (kontaktní) síly $\vec{t}(\vec{n}, \vec{x}, t)$.

Na první pohled je tedy napětí v daném bodě určeno nekonečně mnoha hodnotami vektoru $\vec{t}(\vec{n})$, neboť daným bodem lze proložit nekonečně mnoho různých rovin.



Cauchyho fundamentální věta (Cauchyho napěťový teorém)

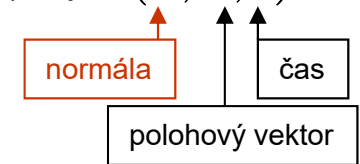
K určení $\vec{t}(\vec{n})$ pro libovolné $\vec{n}$ v daném bodě stačí znát napěťový vektor na třech navzájem kolmých rovinách procházejících tímto bodem. Existuje tedy tenzor 2. řádu nezávislý na $\vec{n}$ a takový že $\vec{t}(\vec{n})$ je lineární funkcí $\vec{n}$:

$$\vec{t}(\vec{n}) = \vec{n} \cdot \mathbf{t} = t_{ij} n_i \vec{e}_j$$

Tenzor $\mathbf{t}$ se označuje jako **Cauchyho tenzor napětí**
(*Cauchy stress tensor*).

Stav napjatosti tělesa v daném čase může být tedy charakterizován polem hustoty plošné (kontaktní) síly $\vec{t}(\vec{n}, \vec{x}, t)$.

Na první pohled je tedy napětí v daném bodě určeno nekonečně mnoha hodnotami vektoru $\vec{t}(\vec{n})$, neboť daným bodem lze proložit nekonečně mnoho různých rovin.



Cauchyho fundamentální věta (Cauchyho napěťový teorém)

K určení $\vec{t}(\vec{n})$ pro libovolné $\vec{n}$ v daném bodě stačí znát napěťový vektor na třech navzájem kolmých rovinách procházejících tímto bodem. Existuje tedy tenzor 2. řádu nezávislý na $\vec{n}$ a takový že $\vec{t}(\vec{n})$ je lineární funkcí $\vec{n}$:

$$\vec{t}(\vec{n}) = \vec{n} \cdot \mathbf{t} = t_{ij} n_i \vec{e}_j$$

Tenzor $\mathbf{t}$ se označuje jako **Cauchyho tenzor napětí** (Cauchy stress tensor).

Odvození Cauchyho fundamentální věty

Zákon zachování hybnosti pro Cauchyho čtyřstěn:

$$\frac{d}{dt} \int_v \rho \vec{v} dv = \int_{\Delta a} \vec{t}(\vec{n}) da - \sum_{k=1}^3 \int_{\Delta a_k} \vec{t}(\vec{e}_k) da + \int_v \vec{f} dv$$

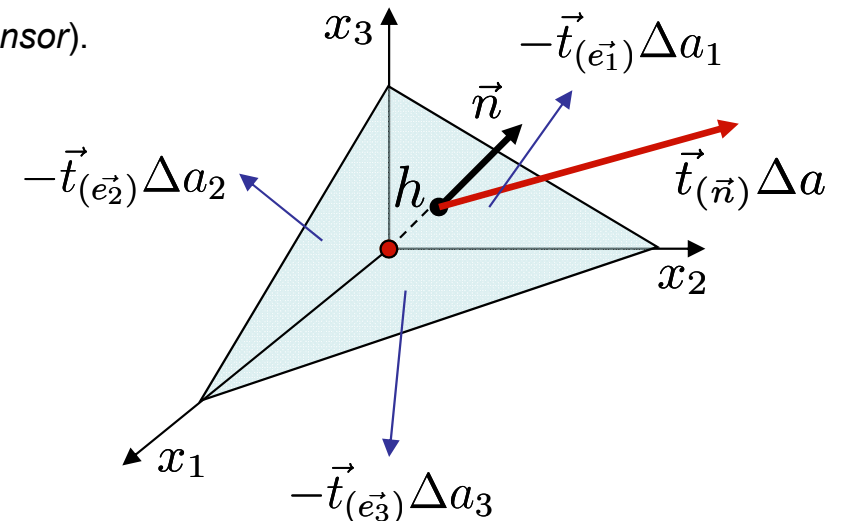
Použijeme větu o střední hodnotě

$$\frac{d}{dt} (\rho \vec{v})^* \Delta v = \vec{t}(\vec{n})^* \Delta a - \sum_{k=1}^3 \vec{t}(\vec{e}_k)^* \Delta a_k + \vec{f}^* \Delta v$$

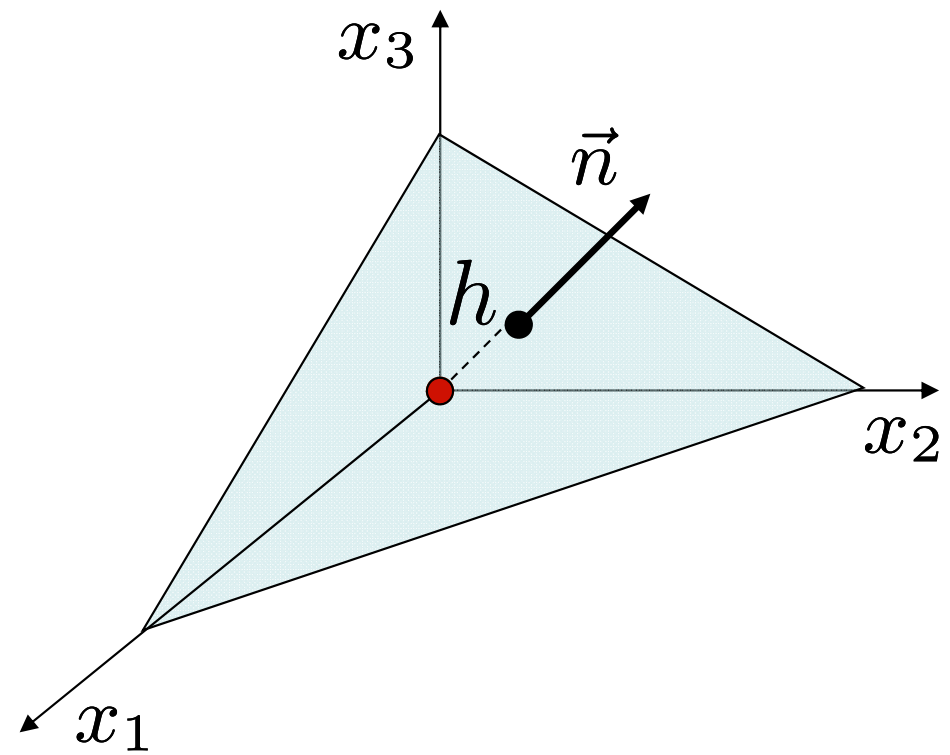
a dále použijeme, že

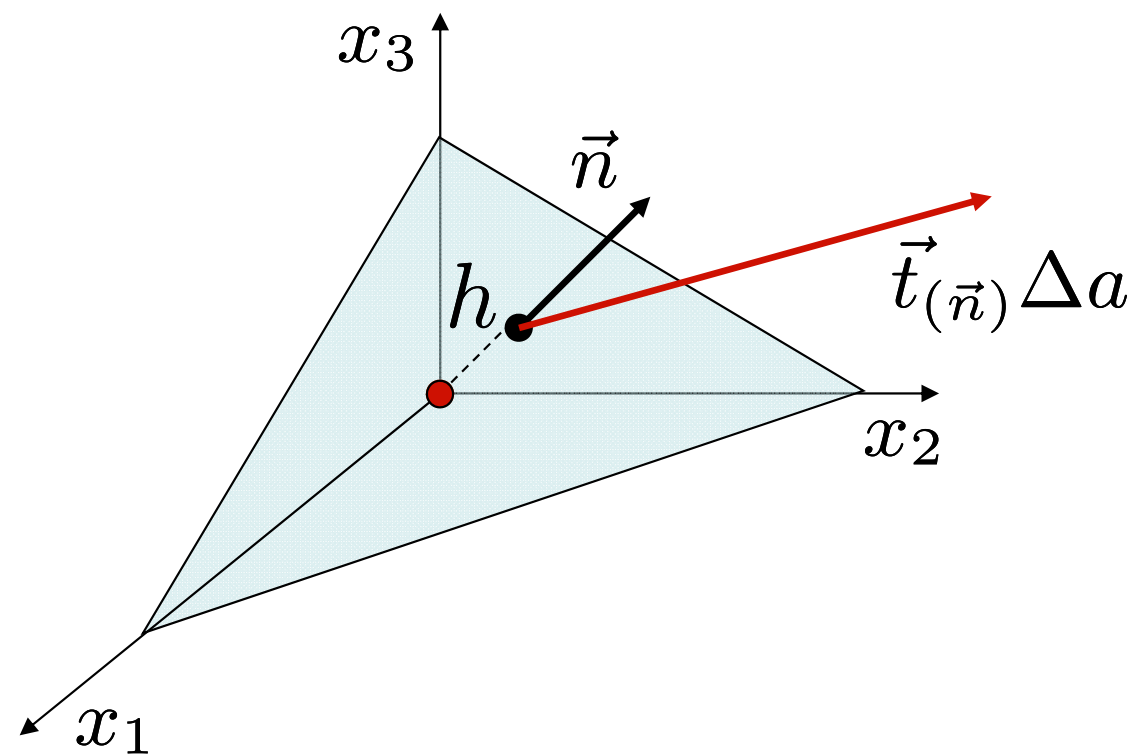
$$\Delta v = \frac{1}{3} h \Delta a$$

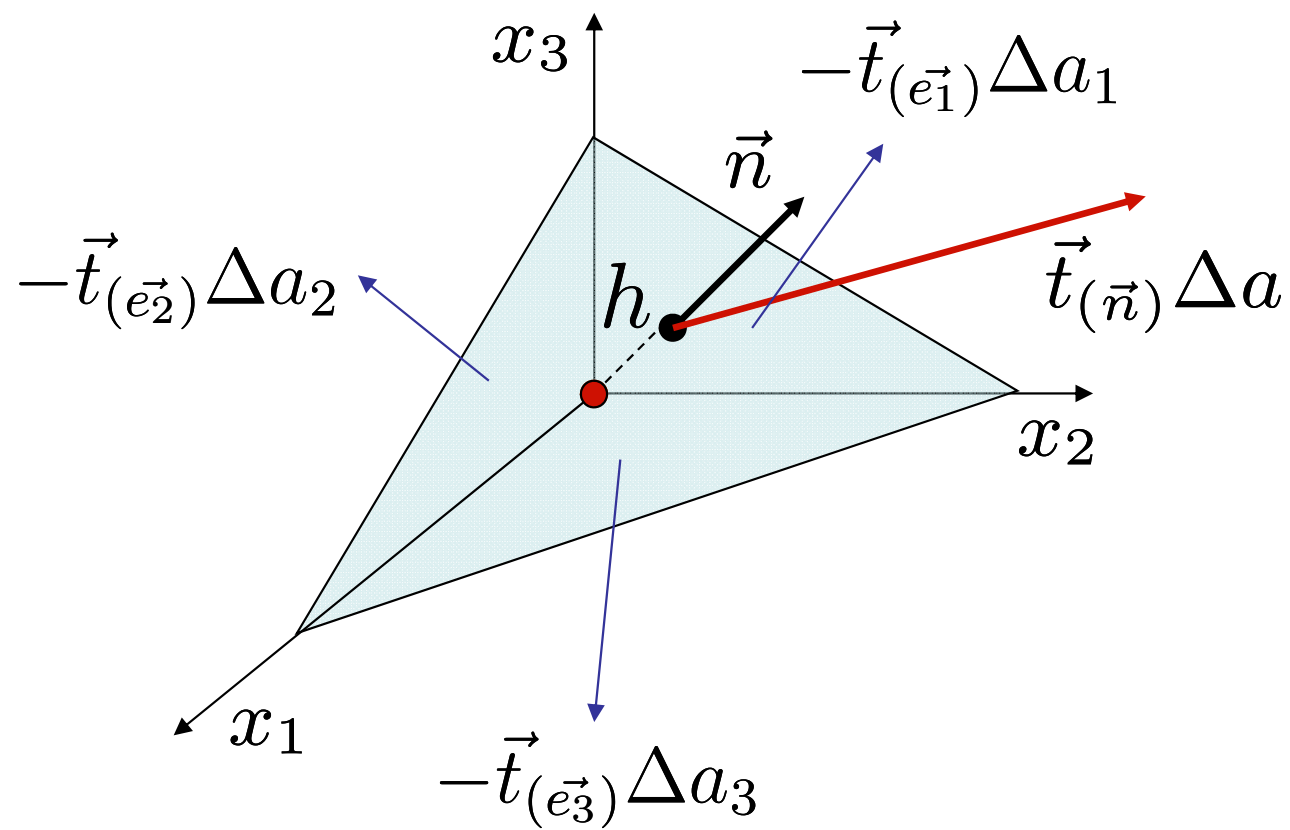
$$\vec{n} \Delta a = \Delta a_k \vec{e}_k \rightarrow \Delta a_k = n_k \Delta a$$



Cauchyho čtyřstěn





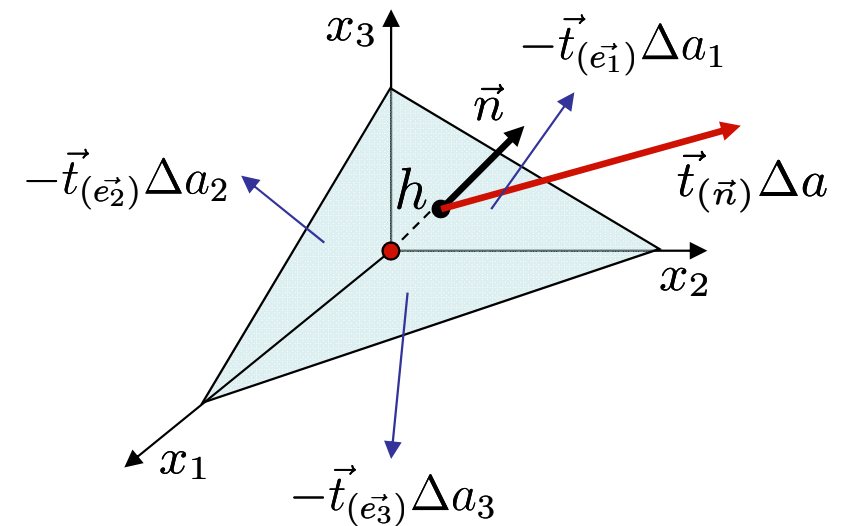


Odvození Cauchyho fundamentální věty

$$\vec{t}_{(\vec{n})} = \vec{n} \cdot \mathbf{t} = t_{ij} n_i \vec{e}_j$$

$$\Delta a_k = n_k \Delta a$$

$$\Delta v = \frac{1}{3} h \Delta a$$



Odvození Cauchyho fundamentální věty

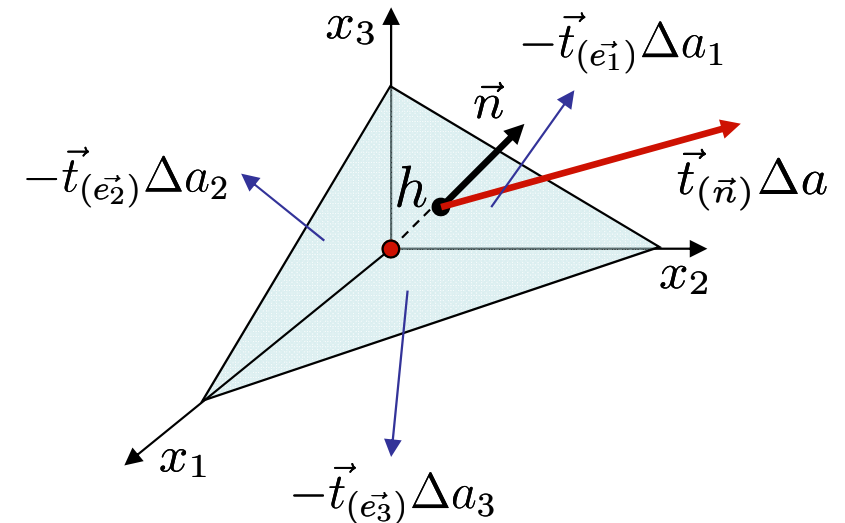
$$\vec{t}_{(\vec{n})} = \vec{n} \cdot \mathbf{t} = t_{ij} n_i \vec{e}_j$$

$$\frac{d}{dt} \int_v \rho \vec{v} dv = \int_{\Delta a} \vec{t}_{(\vec{n})} da - \sum_{k=1}^3 \int_{\Delta a_k} \vec{t}_{(\vec{e}_k)} da + \int_v \vec{f} dv$$

$$\frac{d}{dt} (\rho \vec{v})^* \Delta v = \vec{t}_{(\vec{n})}^* \Delta a - \sum_{k=1}^3 \vec{t}_{(\vec{e}_k)}^* \Delta a_k + \vec{f}^* \Delta v$$

$$\Delta a_k = n_k \Delta a$$

$$\Delta v = \frac{1}{3} h \Delta a$$



Odvození Cauchyho fundamentální věty

$$\vec{t}_{(\vec{n})} = \vec{n} \cdot \mathbf{t} = t_{ij} n_i \vec{e}_j$$

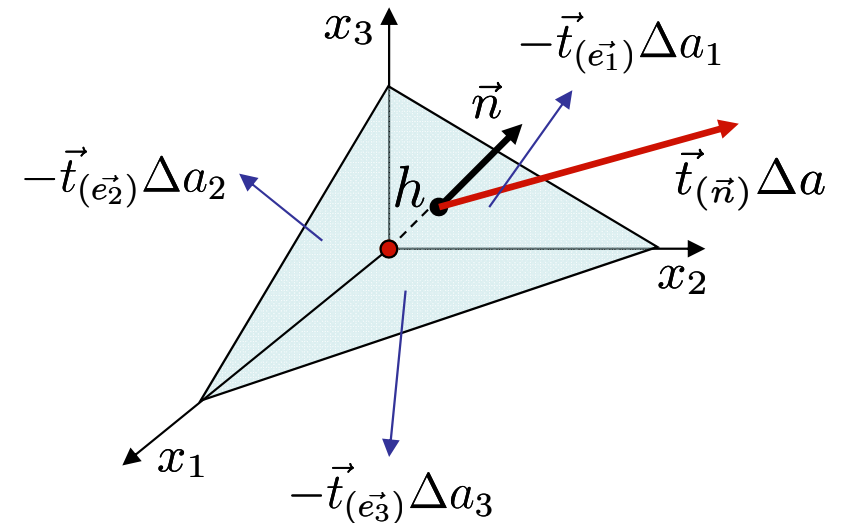
$$\frac{d}{dt} \int_v \rho \vec{v} dv = \int_{\Delta a} \vec{t}_{(\vec{n})} da - \sum_{k=1}^3 \int_{\Delta a_k} \vec{t}_{(\vec{e}_k)} da + \int_v \vec{f} dv$$

$$\frac{d}{dt} (\rho \vec{v})^* \Delta v = \vec{t}_{(\vec{n})}^* \Delta a - \sum_{k=1}^3 \vec{t}_{(\vec{e}_k)}^* \Delta a_k + \vec{f}^* \Delta v$$

$$\frac{1}{3} \frac{d}{dt} (\rho \vec{v})^* h \Delta a = \vec{t}_{(\vec{n})}^* \Delta a - \sum_{k=1}^3 \vec{t}_{(\vec{e}_k)}^* n_k \Delta a + \frac{1}{3} \vec{f}^* h \Delta a$$

$$\Delta a_k = n_k \Delta a$$

$$\Delta v = \frac{1}{3} h \Delta a$$



Odvození Cauchyho fundamentální věty

$$\vec{t}_{(\vec{n})} = \vec{n} \cdot \mathbf{t} = t_{ij} n_i \vec{e}_j$$

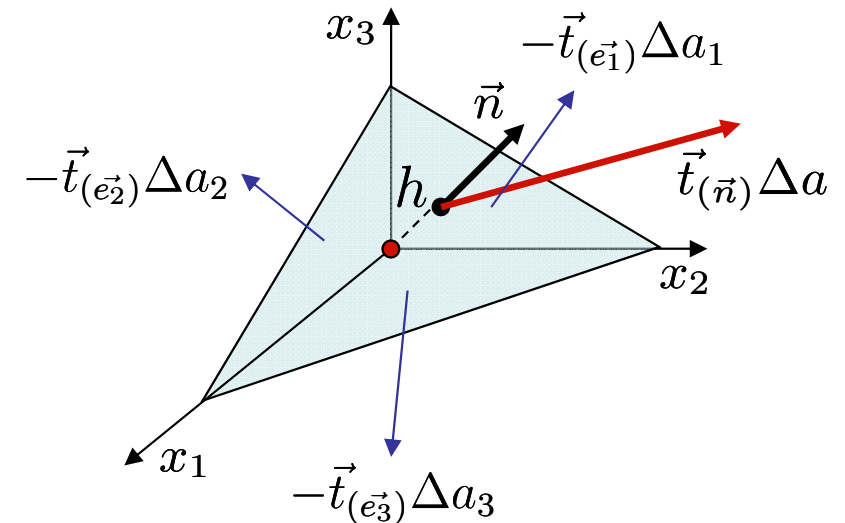
$$\frac{d}{dt} \int_v \rho \vec{v} dv = \int_{\Delta a} \vec{t}_{(\vec{n})} da - \sum_{k=1}^3 \int_{\Delta a_k} \vec{t}_{(\vec{e}_k)} da + \int_v \vec{f} dv$$

$$\frac{d}{dt} (\rho \vec{v})^* \Delta v = \vec{t}_{(\vec{n})}^* \Delta a - \sum_{k=1}^3 \vec{t}_{(\vec{e}_k)}^* \Delta a_k + \vec{f}^* \Delta v$$

$$\frac{1}{3} \frac{d}{dt} (\rho \vec{v})^* h \Delta a = \vec{t}_{(\vec{n})}^* \Delta a - \sum_{k=1}^3 \vec{t}_{(\vec{e}_k)}^* n_k \Delta a + \frac{1}{3} \vec{f}^* h \Delta a$$

$$\Delta a_k = n_k \Delta a$$

$$\Delta v = \frac{1}{3} h \Delta a$$



Odvození Cauchyho fundamentální věty

$$\vec{t}_{(\vec{n})} = \vec{n} \cdot \mathbf{t} = t_{ij} n_i \vec{e}_j$$

$$\frac{d}{dt} \int_v \rho \vec{v} dv = \int_{\Delta a} \vec{t}_{(\vec{n})} da - \sum_{k=1}^3 \int_{\Delta a_k} \vec{t}_{(\vec{e}_k)} da + \int_v \vec{f} dv$$

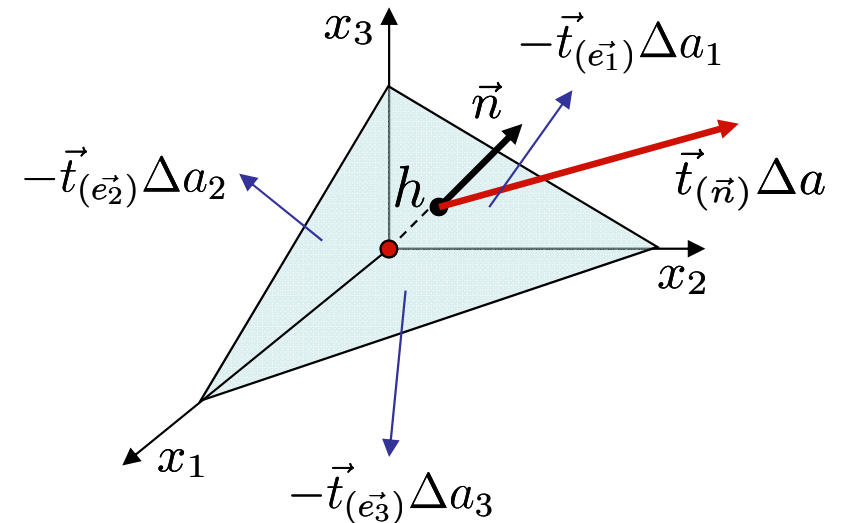
$$\frac{d}{dt} (\rho \vec{v})^* \Delta v = \vec{t}_{(\vec{n})}^* \Delta a - \sum_{k=1}^3 \vec{t}_{(\vec{e}_k)}^* \Delta a_k + \vec{f}^* \Delta v$$

$$\frac{1}{3} \frac{d}{dt} (\rho \vec{v})^* h \Delta a = \vec{t}_{(\vec{n})}^* \Delta a - \sum_{k=1}^3 \vec{t}_{(\vec{e}_k)}^* n_k \Delta a + \frac{1}{3} \vec{f}^* h \Delta a$$

$$\frac{1}{3} \frac{d}{dt} (\rho \vec{v})^* h = \vec{t}_{(\vec{n})}^* - \sum_{k=1}^3 \vec{t}_{(\vec{e}_k)}^* n_k + \frac{1}{3} \vec{f}^* h$$

$$\Delta a_k = n_k \Delta a$$

$$\Delta v = \frac{1}{3} h \Delta a$$



Odvození Cauchyho fundamentální věty

$$\vec{t}_{(\vec{n})} = \vec{n} \cdot \mathbf{t} = t_{ij} n_i \vec{e}_j$$

$$\frac{d}{dt} \int_v \rho \vec{v} dv = \int_{\Delta a} \vec{t}_{(\vec{n})} da - \sum_{k=1}^3 \int_{\Delta a_k} \vec{t}_{(\vec{e}_k)} da + \int_v \vec{f} dv$$

$$\frac{d}{dt} (\rho \vec{v})^* \Delta v = \vec{t}_{(\vec{n})}^* \Delta a - \sum_{k=1}^3 \vec{t}_{(\vec{e}_k)}^* \Delta a_k + \vec{f}^* \Delta v$$

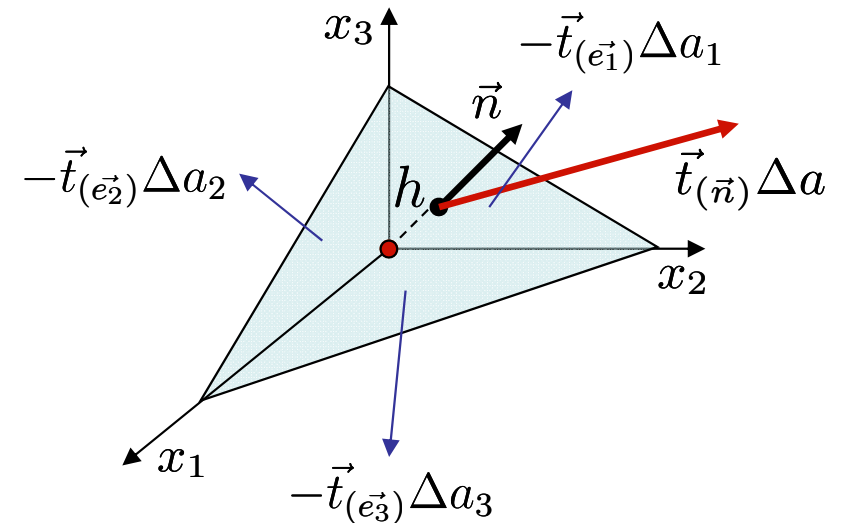
$$\Delta a_k = n_k \Delta a$$

$$\Delta v = \frac{1}{3} h \Delta a$$

$$\frac{1}{3} \frac{d}{dt} (\rho \vec{v})^* h \cancel{\Delta a} = \vec{t}_{(\vec{n})}^* \cancel{\Delta a} - \sum_{k=1}^3 \vec{t}_{(\vec{e}_k)}^* n_k \cancel{\Delta a} + \frac{1}{3} \vec{f}^* h \cancel{\Delta a}$$

$$\frac{1}{3} \frac{d}{dt} (\rho \vec{v})^* h = \vec{t}_{(\vec{n})}^* - \sum_{k=1}^3 \vec{t}_{(\vec{e}_k)}^* n_k + \frac{1}{3} \vec{f}^* h$$

$$h \rightarrow 0 \Rightarrow 0 = \vec{t}_{(\vec{n})} - \sum_{k=1}^3 \vec{t}_{(\vec{e}_k)} n_k$$



Odvození Cauchyho fundamentální věty

$$\vec{t}_{(\vec{n})} = \vec{n} \cdot \mathbf{t} = t_{ij} n_i \vec{e}_j$$

$$\frac{d}{dt} \int_v \rho \vec{v} dv = \int_{\Delta a} \vec{t}_{(\vec{n})} da - \sum_{k=1}^3 \int_{\Delta a_k} \vec{t}_{(\vec{e}_k)} da + \int_v \vec{f} dv$$

$$\frac{d}{dt} (\rho \vec{v})^* \Delta v = \vec{t}_{(\vec{n})}^* \Delta a - \sum_{k=1}^3 \vec{t}_{(\vec{e}_k)}^* \Delta a_k + \vec{f}^* \Delta v$$

$$\Delta a_k = n_k \Delta a$$

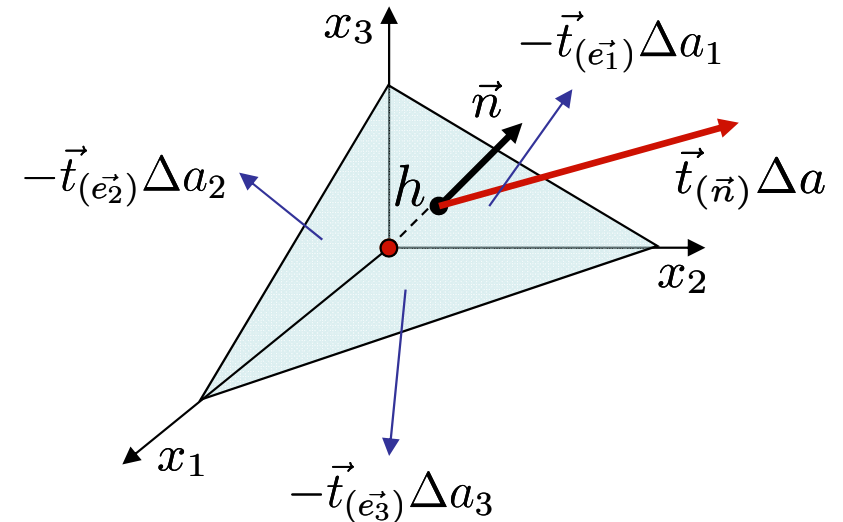
$$\Delta v = \frac{1}{3} h \Delta a$$

$$\frac{1}{3} \frac{d}{dt} (\rho \vec{v})^* h \Delta a = \vec{t}_{(\vec{n})}^* \Delta a - \sum_{k=1}^3 \vec{t}_{(\vec{e}_k)}^* n_k \Delta a + \frac{1}{3} \vec{f}^* h \Delta a$$

$$\frac{1}{3} \frac{d}{dt} (\rho \vec{v})^* h = \vec{t}_{(\vec{n})}^* - \sum_{k=1}^3 \vec{t}_{(\vec{e}_k)}^* n_k + \frac{1}{3} \vec{f}^* h$$

$$h \rightarrow 0 \Rightarrow 0 = \vec{t}_{(\vec{n})} - \sum_{k=1}^3 \vec{t}_{(\vec{e}_k)} n_k$$

$$\vec{t}_{(\vec{n})} = \sum_{k=1}^3 \vec{t}_{(\vec{e}_k)} n_k = \underbrace{(t_{kl} \vec{e}_l)}_{\vec{t}_{(\vec{e}_k)}} n_k = n_k t_{kl} \vec{e}_l$$



Odvození Cauchyho fundamentální věty

$$\vec{t}_{(\vec{n})} = \vec{n} \cdot \mathbf{t} = t_{ij} n_i \vec{e}_j$$

$$\frac{d}{dt} \int_v \rho \vec{v} dv = \int_{\Delta a} \vec{t}_{(\vec{n})} da - \sum_{k=1}^3 \int_{\Delta a_k} \vec{t}_{(\vec{e}_k)} da + \int_v \vec{f} dv$$

$$\frac{d}{dt} (\rho \vec{v})^* \Delta v = \vec{t}_{(\vec{n})}^* \Delta a - \sum_{k=1}^3 \vec{t}_{(\vec{e}_k)}^* \Delta a_k + \vec{f}^* \Delta v$$

$$\Delta a_k = n_k \Delta a$$

$$\Delta v = \frac{1}{3} h \Delta a$$

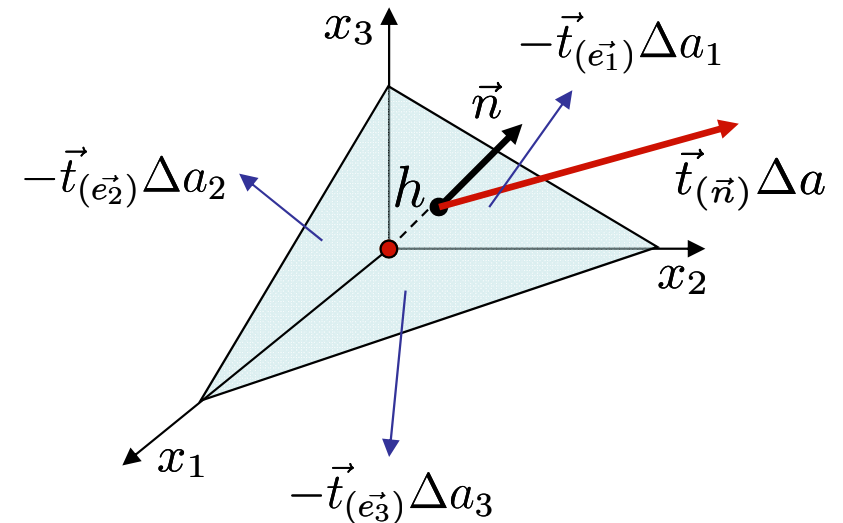
$$\frac{1}{3} \frac{d}{dt} (\rho \vec{v})^* h \cancel{\Delta a} = \vec{t}_{(\vec{n})}^* \cancel{\Delta a} - \sum_{k=1}^3 \vec{t}_{(\vec{e}_k)}^* n_k \cancel{\Delta a} + \frac{1}{3} \vec{f}^* h \cancel{\Delta a}$$

$$\frac{1}{3} \frac{d}{dt} (\rho \vec{v})^* h = \vec{t}_{(\vec{n})}^* - \sum_{k=1}^3 \vec{t}_{(\vec{e}_k)}^* n_k + \frac{1}{3} \vec{f}^* h$$

$$h \rightarrow 0 \Rightarrow 0 = \vec{t}_{(\vec{n})} - \sum_{k=1}^3 \vec{t}_{(\vec{e}_k)} n_k$$

$$\vec{t}_{(\vec{n})} = \sum_{k=1}^3 \vec{t}_{(\vec{e}_k)} n_k = \underbrace{(t_{kl} \vec{e}_l)}_{\vec{t}_{(\vec{e}_k)}} n_k = n_k t_{kl} \vec{e}_l$$

$$\vec{t}_{(\vec{n})} = \vec{n} \cdot \mathbf{t}$$



$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} (\rho \vec{v})^* \Delta v &= \vec{t}_{(\vec{n})}^* \Delta a - \sum_{k=1}^3 \vec{t}_{(\vec{e}_k)}^* \Delta a_k + \vec{f}^* \Delta v \\ \Delta a_k &= n_k \Delta a \\ \Delta v &= \frac{1}{3} h \Delta a \end{aligned} \right\} \quad \frac{1}{3} \frac{d}{dt} (\rho \vec{v})^* h \cancel{\Delta a} = \vec{t}_{(\vec{n})}^* \cancel{\Delta a} - \sum_{k=1}^3 \vec{t}_{(\vec{e}_k)}^* n_k \cancel{\Delta a} + \frac{1}{3} \vec{f}^* h \cancel{\Delta a}$$

V limitě $h \rightarrow 0$ odtud dostaneme $\vec{t}_{(\vec{n})} = \sum_{k=1}^3 \vec{t}_{(\vec{e}_k)} n_k = t_{kl} n_k \vec{e}_l$, kde $t_{kl} := \vec{t}_{(\vec{e}_k)} \cdot \vec{e}_l$, a tedy $\vec{t}_{(\vec{e}_k)} = t_{kl} \vec{e}_l$.

Interpretace složek Cauchyho tenzoru napětí

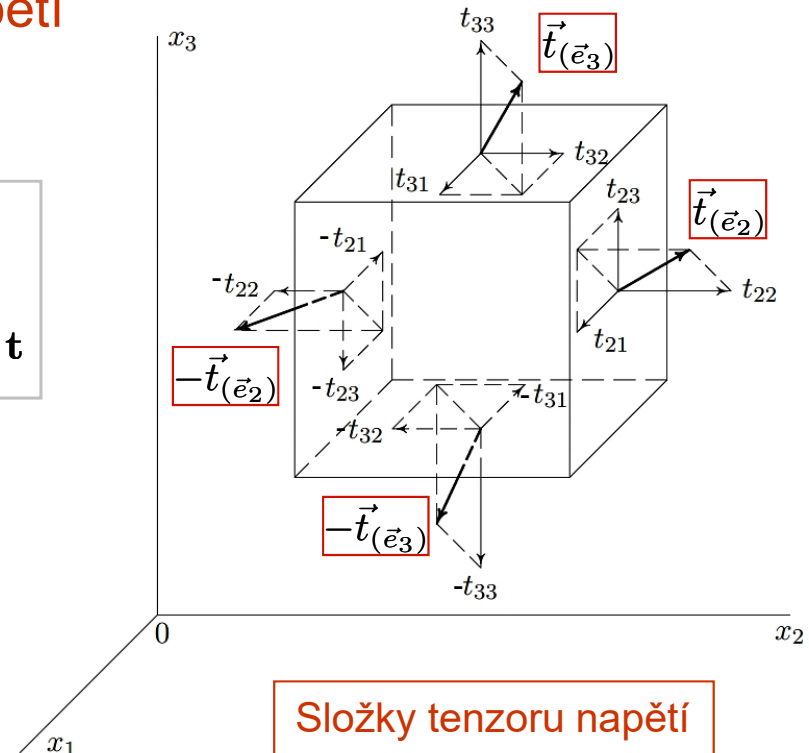
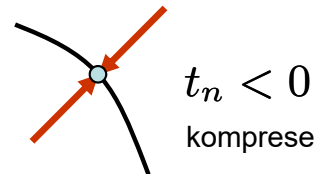
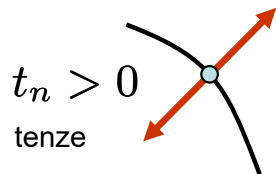
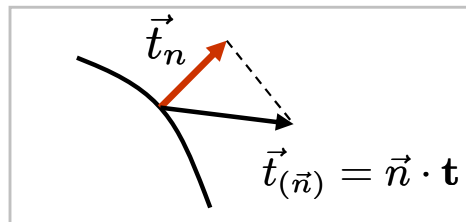
1. Normálové napětí (*normal stress*)

normálová složka napětí

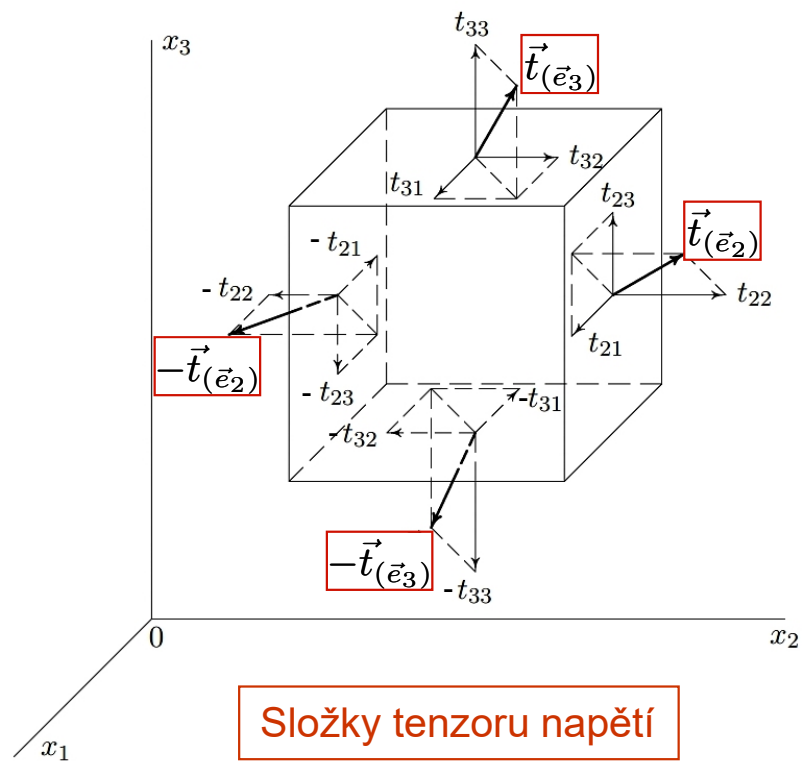
$$t_n = \vec{n} \cdot \mathbf{t} \cdot \vec{n}$$

normálový vektor napětí

$$\vec{t}_n = (\vec{n} \cdot \mathbf{t} \cdot \vec{n}) \vec{n}$$

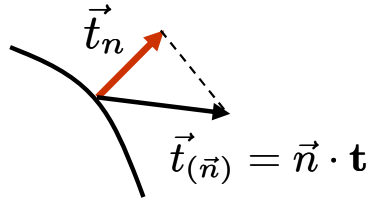


Interpretace složek Cauchyho tenzoru napětí



Interpretace složek Cauchyho tenzoru napětí

1. Normálové napětí (*normal stress*)



normálová složka napětí

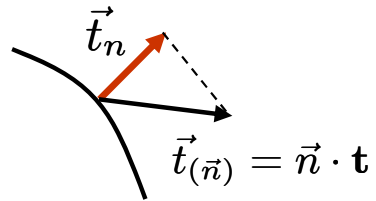
$$t_n = \vec{t}_{(\vec{n})} \cdot \vec{n} = \vec{n} \cdot \mathbf{t} \cdot \vec{n}$$

normálový vektor napětí

$$\vec{t}_n = (\vec{n} \cdot \mathbf{t} \cdot \vec{n}) \vec{n}$$

Interpretace složek Cauchyho tenzoru napětí

1. Normálové napětí (*normal stress*)



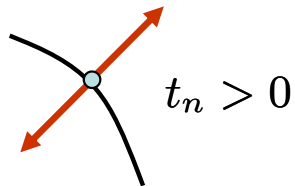
normálová složka napětí

$$t_n = \vec{t}_{(\vec{n})} \cdot \vec{n} = \vec{n} \cdot \mathbf{t} \cdot \vec{n}$$

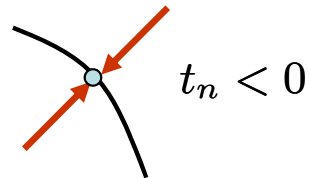
normálový vektor napětí

$$\vec{t}_n = (\vec{n} \cdot \mathbf{t} \cdot \vec{n}) \vec{n}$$

tenze

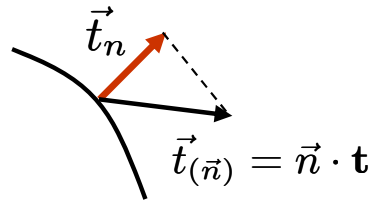


komprese



Interpretace složek Cauchyho tenzoru napětí

1. Normálové napětí (*normal stress*)



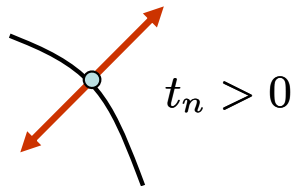
normálová složka napětí

$$t_n = \vec{t}_{(\vec{n})} \cdot \vec{n} = \vec{n} \cdot \mathbf{t} \cdot \vec{n}$$

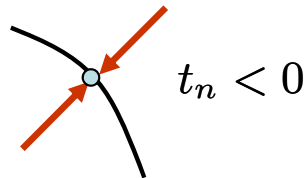
normálový vektor napětí

$$\vec{t}_n = (\vec{n} \cdot \mathbf{t} \cdot \vec{n}) \vec{n}$$

tenze

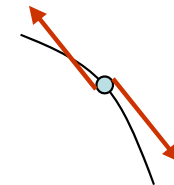
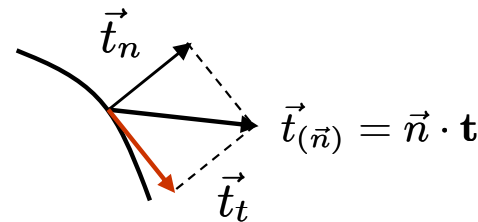


komprese



2. Smykové napětí (*shear stress*)

$$\vec{t}_t = \vec{t}_{(\vec{n})} - \vec{t}_n = \vec{n} \cdot \mathbf{t} - (\vec{n} \cdot \mathbf{t} \cdot \vec{n}) \vec{n}$$



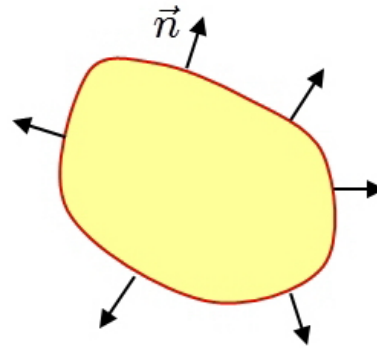
Cvičení 1: Volný povrch

Nepůsobí-li na povrch tělesa vnější síla, pak v každém bodě hranice musí platit podmínka volného povrchu (*free surface*):

$$\vec{t}_{(\vec{n})} = \vec{n} \cdot \mathbf{t} = 0$$

Podmínka volného prokluzu (*free slip*)

$$\vec{t}_t = \vec{n} \cdot \mathbf{t} - (\vec{n} \cdot \mathbf{t} \cdot \vec{n}) \vec{n} = 0$$



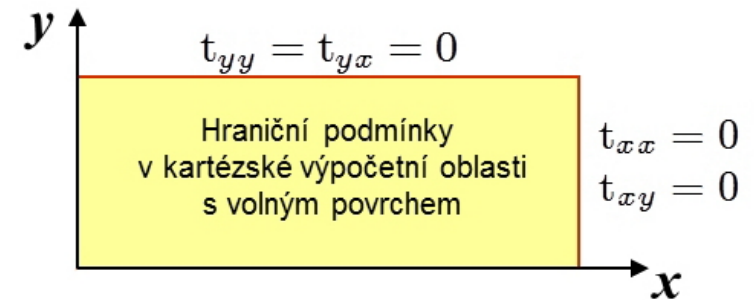
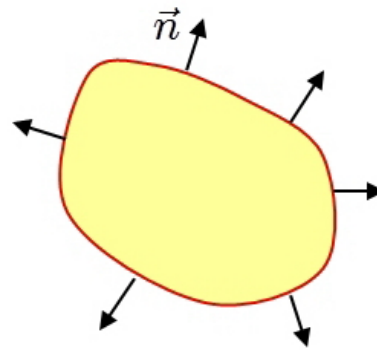
Cvičení 1: Volný povrch

Nepůsobí-li na povrch tělesa vnější síla, pak v každém bodě hranice musí platit podmínka volného povrchu (*free surface*):

$$\vec{t}_{(\vec{n})} = \vec{n} \cdot \mathbf{t} = 0$$

Podmínka volného prokluzu (*free slip*)

$$\vec{t}_t = \vec{n} \cdot \mathbf{t} - (\vec{n} \cdot \mathbf{t} \cdot \vec{n}) \vec{n} = 0$$



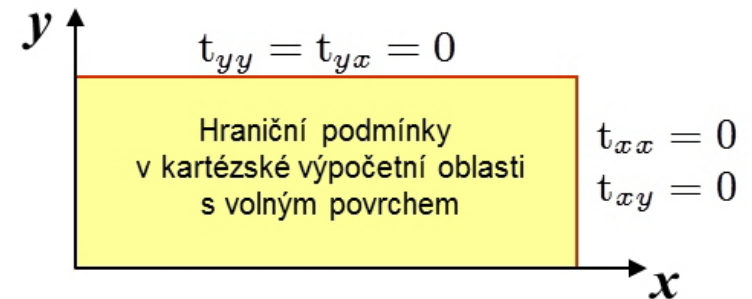
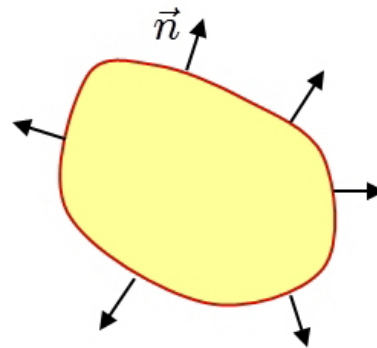
Cvičení 1: Volný povrch

Nepůsobí-li na povrch tělesa vnější síla, pak v každém bodě hranice musí platit podmínka volného povrchu (*free surface*):

$$\vec{t}_{(\vec{n})} = \vec{n} \cdot \mathbf{t} = 0$$

Podmínka volného prokluzu (*free slip*)

$$\vec{t}_t = \vec{n} \cdot \mathbf{t} - (\vec{n} \cdot \mathbf{t} \cdot \vec{n}) \vec{n} = 0$$



Cvičení 2:

Určete vektor napětí, působící v bodě $P=(0.5, 0.5, 1.5)$ na plochu

$$z = x^2 + y^2 + 1.$$

Tenzor napětí v tomto bodě nabývá hodnot

$$\mathbf{t} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 \\ 3 & -9 & -6 \\ -3 & -6 & -9 \end{pmatrix}.$$

Zjistěte, zda je v daném bodě uvažovaná plocha v kompresi nebo extenzi.

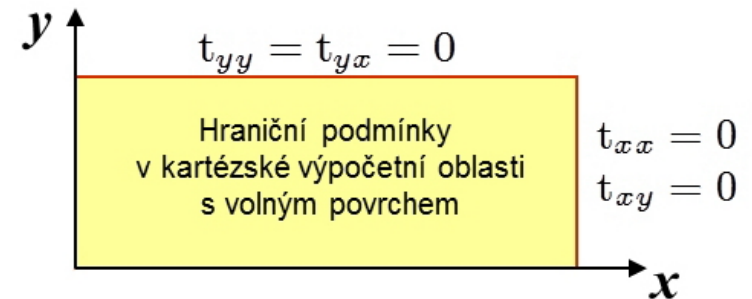
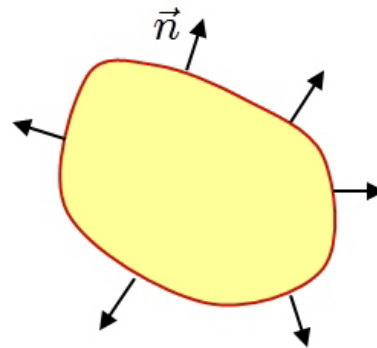
Cvičení 1: Volný povrch

Nepůsobí-li na povrch tělesa vnější síla, pak v každém bodě hranice musí platit podmínka volného povrchu (*free surface*):

$$\vec{t}_{(\vec{n})} = \vec{n} \cdot \mathbf{t} = 0$$

Podmínka volného prokluzu (*free slip*)

$$\vec{t}_t = \vec{n} \cdot \mathbf{t} - (\vec{n} \cdot \mathbf{t} \cdot \vec{n}) \vec{n} = 0$$



Cvičení 2:

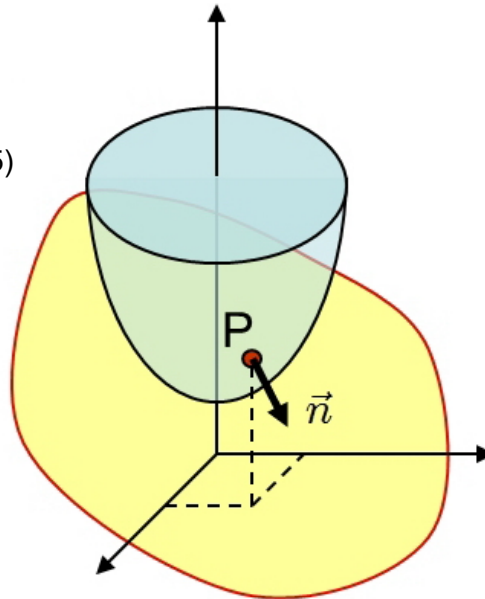
Určete vektor napětí, působící v bodě $P=(0.5, 0.5, 1.5)$ na plochu

$$z = x^2 + y^2 + 1.$$

Tenzor napětí v tomto bodě nabývá hodnot

$$\mathbf{t} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 \\ 3 & -9 & -6 \\ -3 & -6 & -9 \end{pmatrix}.$$

Zjistěte, zda je v daném bodě uvažovaná plocha v kompresi nebo extenzi.



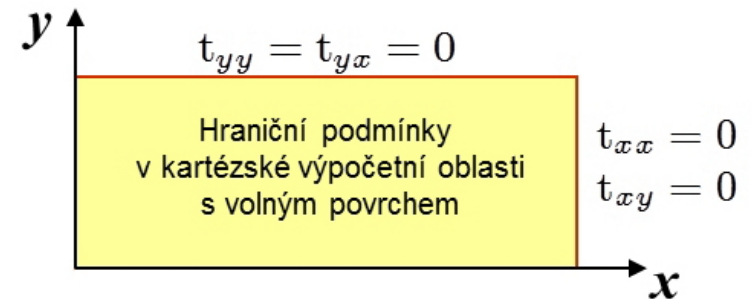
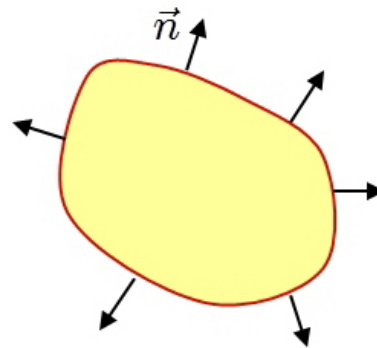
Cvičení 1: Volný povrch

Nepůsobí-li na povrch tělesa vnější síla, pak v každém bodě hranice musí platit podmínka volného povrchu (*free surface*):

$$\vec{t}_{(\vec{n})} = \vec{n} \cdot \mathbf{t} = 0$$

Podmínka volného prokluzu (*free slip*)

$$\vec{t}_t = \vec{n} \cdot \mathbf{t} - (\vec{n} \cdot \mathbf{t} \cdot \vec{n}) \vec{n} = 0$$



Cvičení 2:

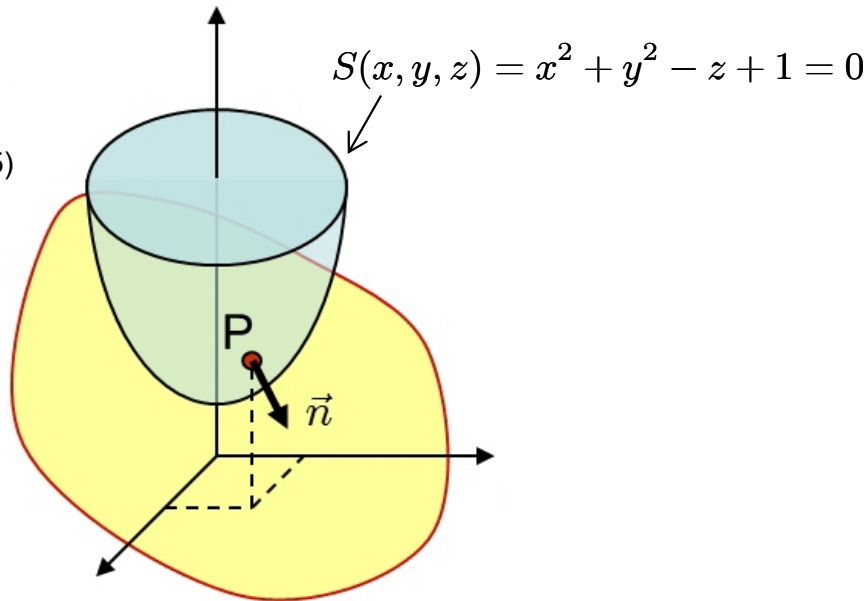
Určete vektor napětí, působící v bodě $P=(0.5, 0.5, 1.5)$ na plochu

$$z = x^2 + y^2 + 1.$$

Tenzor napětí v tomto bodě nabývá hodnot

$$\mathbf{t} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 \\ 3 & -9 & -6 \\ -3 & -6 & -9 \end{pmatrix}.$$

Zjistěte, zda je v daném bodě uvažovaná plocha v kompresi nebo extenzi.



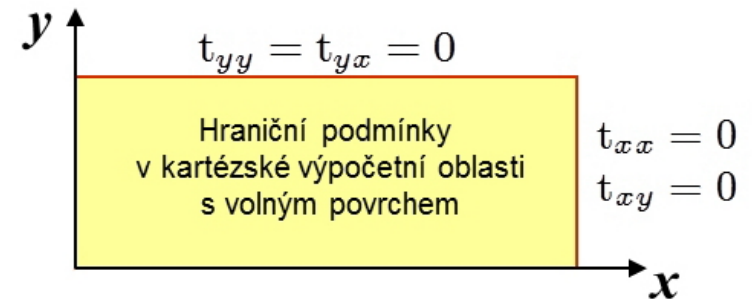
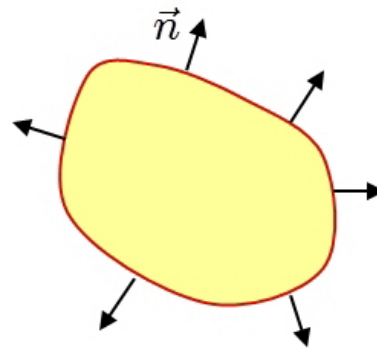
Cvičení 1: Volný povrch

Nepůsobí-li na povrch tělesa vnější síla, pak v každém bodě hranice musí platit podmínka volného povrchu (*free surface*):

$$\vec{t}_{(\vec{n})} = \vec{n} \cdot \mathbf{t} = 0$$

Podmínka volného prokluzu (*free slip*)

$$\vec{t}_t = \vec{n} \cdot \mathbf{t} - (\vec{n} \cdot \mathbf{t} \cdot \vec{n}) \vec{n} = 0$$



Cvičení 2:

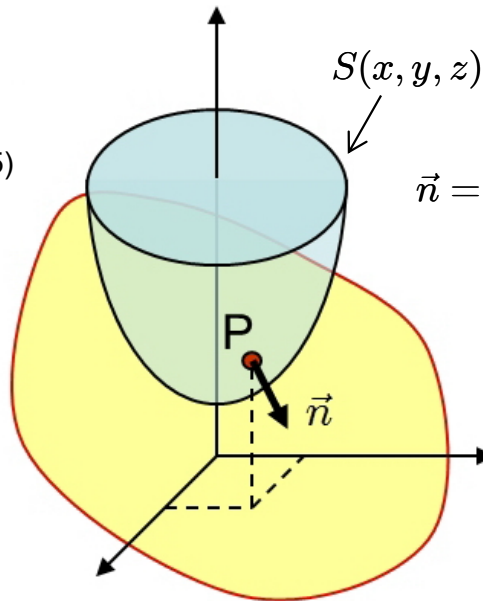
Určete vektor napětí, působící v bodě $P=(0.5, 0.5, 1.5)$ na plochu

$$z = x^2 + y^2 + 1.$$

Tenzor napětí v tomto bodě nabývá hodnot

$$\mathbf{t} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 \\ 3 & -9 & -6 \\ -3 & -6 & -9 \end{pmatrix}.$$

Zjistěte, zda je v daném bodě uvažovaná plocha v kompresi nebo extenzi.



$$S(x, y, z) = x^2 + y^2 - z + 1 = 0$$

$$\vec{n} = \frac{\nabla S}{|\nabla S|} = \frac{2x\vec{e}_x + 2y\vec{e}_y - \vec{e}_z}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

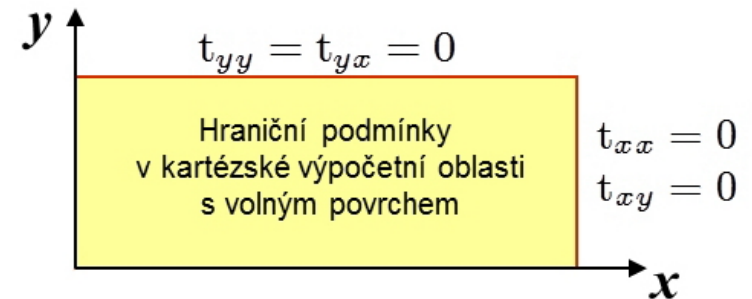
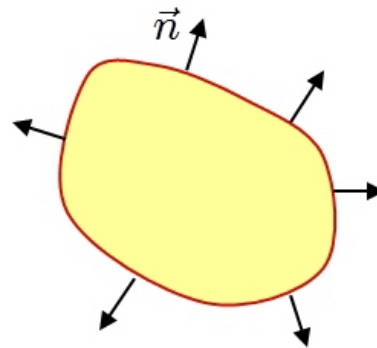
Cvičení 1: Volný povrch

Nepůsobí-li na povrch tělesa vnější síla, pak v každém bodě hranice musí platit podmínka volného povrchu (*free surface*):

$$\vec{t}_{(\vec{n})} = \vec{n} \cdot \mathbf{t} = 0$$

Podmínka volného prokluzu (*free slip*)

$$\vec{t}_t = \vec{n} \cdot \mathbf{t} - (\vec{n} \cdot \mathbf{t} \cdot \vec{n}) \vec{n} = 0$$



Cvičení 2:

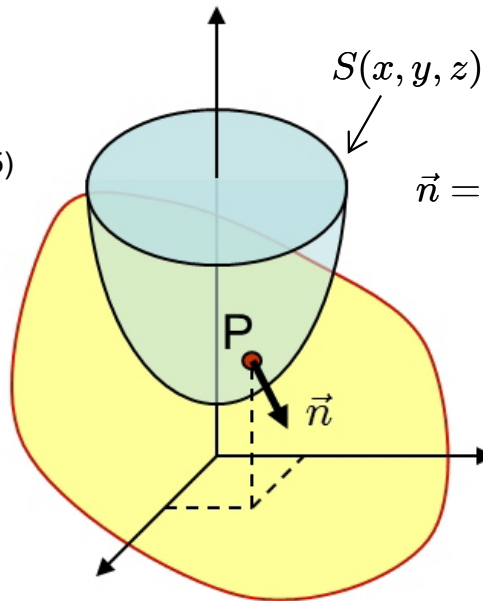
Určete vektor napětí, působící v bodě $P=(0.5, 0.5, 1.5)$ na plochu

$$z = x^2 + y^2 + 1.$$

Tenzor napětí v tomto bodě nabývá hodnot

$$\mathbf{t} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 \\ 3 & -9 & -6 \\ -3 & -6 & -9 \end{pmatrix}.$$

Zjistěte, zda je v daném bodě uvažovaná plocha v kompresi nebo extenzi.



$$S(x, y, z) = x^2 + y^2 - z + 1 = 0$$

$$\vec{n} = \frac{\nabla S}{|\nabla S|} = \frac{2x\vec{e}_x + 2y\vec{e}_y - \vec{e}_z}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$\vec{t}_{(\vec{n})} = \vec{n} \cdot \mathbf{t} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 \\ 3 & -9 & -6 \\ -3 & -6 & -9 \end{pmatrix}$$

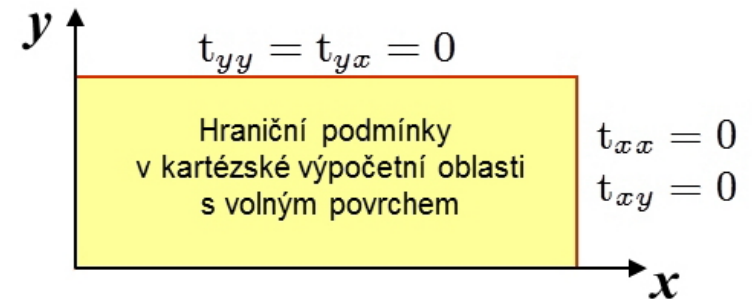
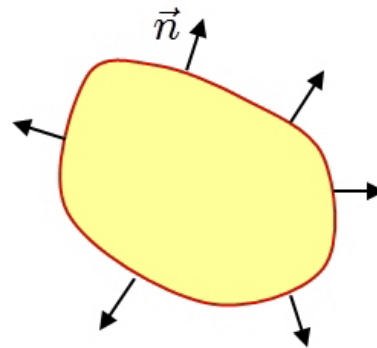
Cvičení 1: Volný povrch

Nepůsobí-li na povrch tělesa vnější síla, pak v každém bodě hranice musí platit podmínka volného povrchu (*free surface*):

$$\vec{t}_{(\vec{n})} = \vec{n} \cdot \mathbf{t} = 0$$

Podmínka volného prokluzu (*free slip*)

$$\vec{t}_t = \vec{n} \cdot \mathbf{t} - (\vec{n} \cdot \mathbf{t} \cdot \vec{n}) \vec{n} = 0$$



Cvičení 2:

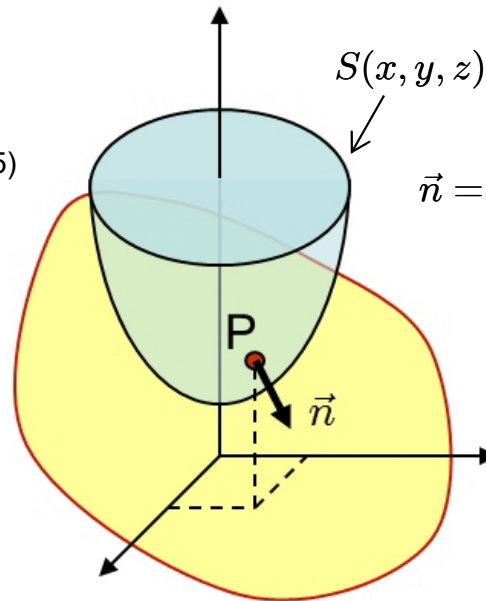
Určete vektor napětí, působící v bodě $P=(0.5, 0.5, 1.5)$ na plochu

$$z = x^2 + y^2 + 1.$$

Tenzor napětí v tomto bodě nabývá hodnot

$$\mathbf{t} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 \\ 3 & -9 & -6 \\ -3 & -6 & -9 \end{pmatrix}.$$

Zjistěte, zda je v daném bodě uvažovaná plocha v kompresi nebo extenzi.



$$S(x, y, z) = x^2 + y^2 - z + 1 = 0$$

$$\vec{n} = \frac{\nabla S}{|\nabla S|} = \frac{2x\vec{e}_x + 2y\vec{e}_y - \vec{e}_z}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3} \right)$$

$$\vec{t}_{(\vec{n})} = \vec{n} \cdot \mathbf{t} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3} \right) \begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 \\ 3 & -9 & -6 \\ -3 & -6 & -9 \end{pmatrix}$$

$$\vec{t}_{(\vec{n})} = (\sqrt{3}, 0, 0), \quad t_n = \vec{t}_{(\vec{n})} \cdot \vec{n} = 1$$

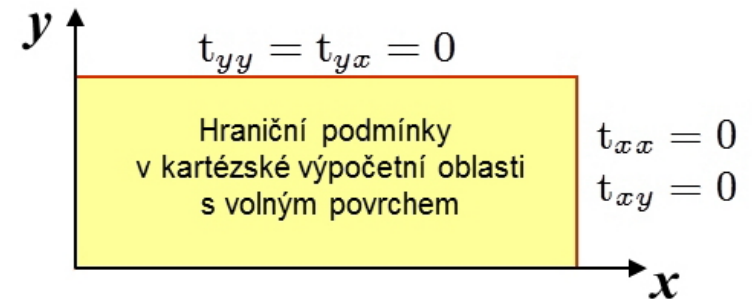
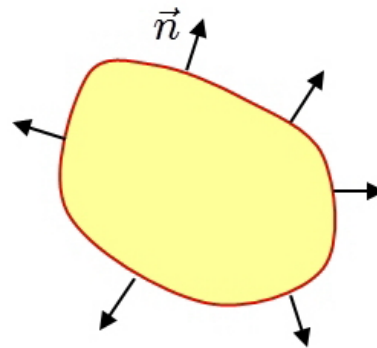
Cvičení 1: Volný povrch

Nepůsobí-li na povrch tělesa vnější síla, pak v každém bodě hranice musí platit podmínka volného povrchu (*free surface*):

$$\vec{t}_{(\vec{n})} = \vec{n} \cdot \mathbf{t} = 0$$

Podmínka volného prokluzu (*free slip*)

$$\vec{t}_t = \vec{n} \cdot \mathbf{t} - (\vec{n} \cdot \mathbf{t} \cdot \vec{n}) \vec{n} = 0$$



Cvičení 2:

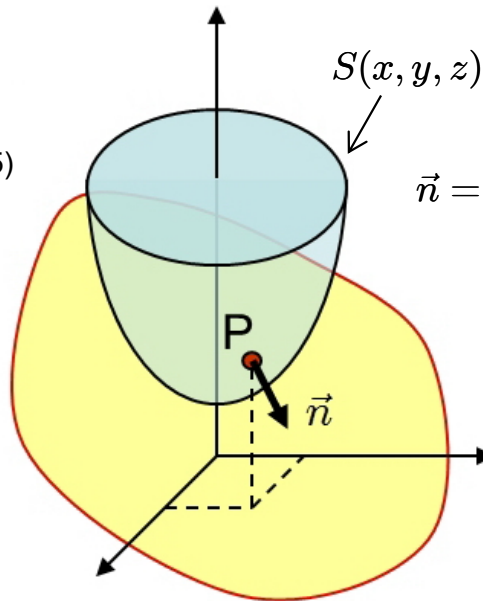
Určete vektor napětí, působící v bodě $P=(0.5, 0.5, 1.5)$ na plochu

$$z = x^2 + y^2 + 1.$$

Tenzor napětí v tomto bodě nabývá hodnot

$$\mathbf{t} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 \\ 3 & -9 & -6 \\ -3 & -6 & -9 \end{pmatrix}.$$

Zjistěte, zda je v daném bodě uvažovaná plocha v kompresi nebo extenzi.



$$S(x, y, z) = x^2 + y^2 - z + 1 = 0$$

$$\vec{n} = \frac{\nabla S}{|\nabla S|} = \frac{2x\vec{e}_x + 2y\vec{e}_y - \vec{e}_z}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$\vec{t}_{(\vec{n})} = \vec{n} \cdot \mathbf{t} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 \\ 3 & -9 & -6 \\ -3 & -6 & -9 \end{pmatrix}$$

$$\vec{t}_{(\vec{n})} = (\sqrt{3}, 0, 0), \quad t_n = \vec{t}_{(\vec{n})} \cdot \vec{n} = 1$$

$$t_n > 0 \rightarrow \text{extenze}$$

Transformace souřadné soustavy:

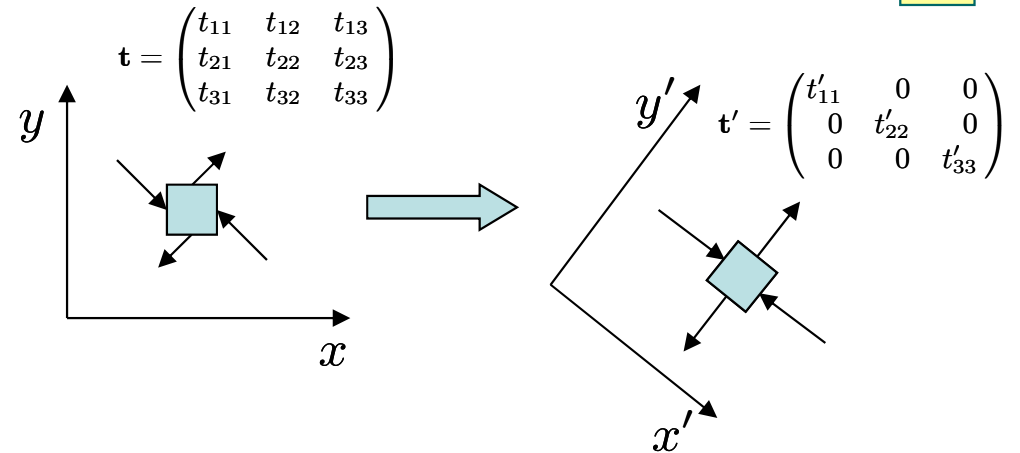
$$\mathbf{t}' = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{t} \cdot \mathbf{Q}^T, \text{ složkově: } t'_{ij} = Q_{im} Q_{jn} t_{mn}$$

Diagonalizace tenzoru napětí:

$$\mathbf{t} \cdot \vec{p} = \lambda \vec{p}$$

$$\det(\mathbf{t} - \lambda \mathbf{I}) = 0$$

Vlastní čísla Cauchyova tenzoru napětí jsou reálná, neboť se jedná o symetrický tenzor (dokážeme později).

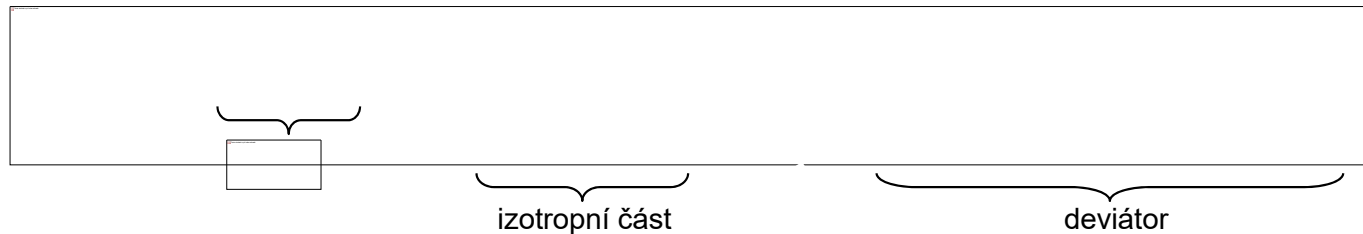


Invarianty tenzoru napětí:

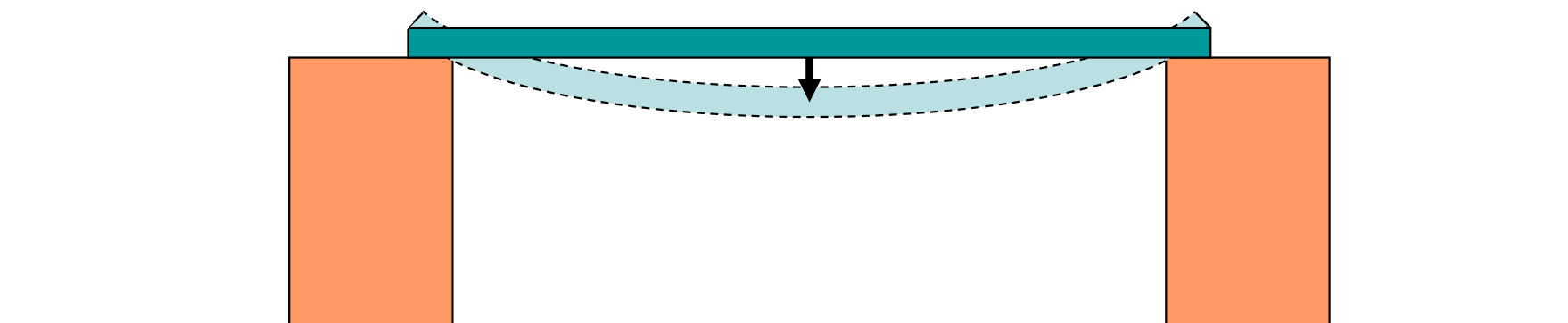
Charakteristická rovnice: $\det(\mathbf{t} - \lambda \mathbf{I}) = -\lambda^3 + t_I \lambda^2 - t_{II} \lambda + t_{III} = 0$

Rozklad tenzoru napětí na izotropní část a deviátor:

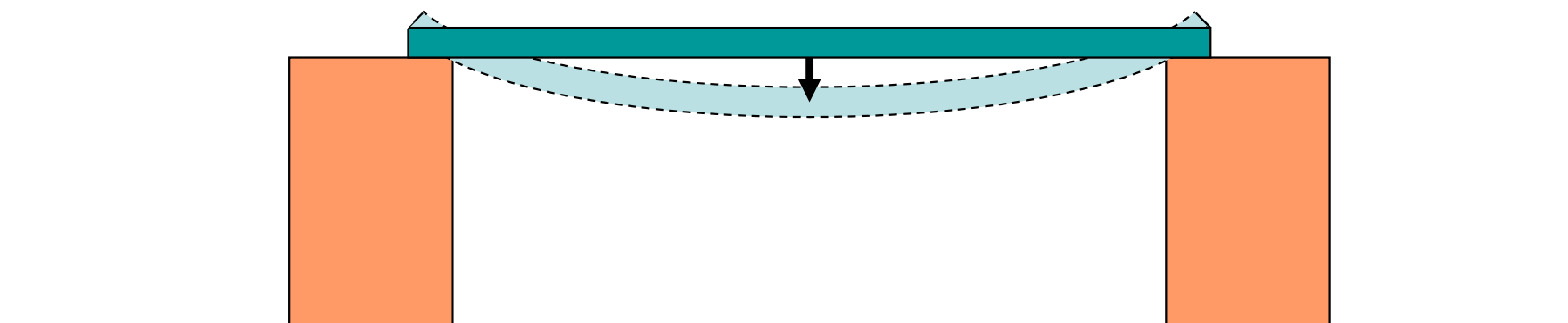
Tlak:



Invarianty deviátoru:



Cauchyho tenzor napětí popisuje napěťový stav deformovaného tělesa,
tj. napětí v okamžité konfiguraci.



Cauchyho tenzor napětí popisuje napěťový stav deformovaného tělesa,
tj. napětí v okamžité konfiguraci.

Problém:

Jak definovat míru napětí v referenční konfiguraci?

Piola-Kirchhoffův tenzor napětí

Cauchyho tenzor napětí charakterizuje povrchovou sílu působící na *deformovaný* element plochy:

$$\vec{t}_{(\vec{n})} da = (\vec{n} \cdot \mathbf{t}) da = d\vec{a} \cdot \mathbf{t}$$

Piola-Kirchhoffův tenzor napětí

Cauchyho tenzor napětí charakterizuje povrchovou sílu působící na *deformovaný* element plochy:

$$\vec{t}_{(\vec{n})} da = (\vec{n} \cdot \mathbf{t}) da = d\vec{a} \cdot \mathbf{t}$$

Lagrangeovský Cauchyho tenzor napětí = Cauchyho tenzor vyjádřený v souřadnicích $\vec{X}$:

$$\mathbf{t}(\vec{X}, t) := \mathbf{t}(\vec{x}(\vec{X}, t), t)$$

Záměrně zde používáme malé písmeno, neboť s velkým písmenem budeme později psát jinak zavedený lagrangeovský tenzor napětí.

Piola-Kirchhoffův tenzor napětí

Cauchyho tenzor napětí charakterizuje povrchovou sílu působící na *deformovaný* element plochy:

$$\vec{t}_{(\vec{n})} da = (\vec{n} \cdot \mathbf{t}) da = d\vec{a} \cdot \mathbf{t}$$

Lagrangeovský Cauchyho tenzor napětí = Cauchyho tenzor vyjádřený v souřadnicích $\vec{X}$:

$$\mathbf{t}(\vec{X}, t) := \mathbf{t}(\vec{x}(\vec{X}, t), t)$$

Záměrně zde používáme malé písmeno, neboť s velkým písmenem budeme později psát jinak zavedený lagrangeovský tenzor napětí.

Jak bude ukázáno později, Cauchyho tenzor napětí umožňuje snadno vyjádřit základní pohybové rovnice v *deformovaném* stavu. V řadě aplikací však potřebujeme tyto vztahy a obecně míru napětí vyjádřit v *referenční* konfiguraci. Za tímto účelem se zavádí *první a druhý Piola-Kirchhoffův tenzor napětí* a případně se používají i jiné míry napětí (Biotův tenzor apod.).

Piola-Kirchhoffův tenzor napětí

Cauchyho tenzor napětí charakterizuje povrchovou sílu působící na *deformovaný* element plochy:

$$\vec{t}_{(\vec{n})} da = (\vec{n} \cdot \mathbf{t}) da = d\vec{a} \cdot \mathbf{t}$$

Lagrangeovský Cauchyho tenzor napětí = Cauchyho tenzor vyjádřený v souřadnicích $\vec{X}$:

$$\mathbf{t}(\vec{X}, t) := \mathbf{t}(\vec{x}(\vec{X}, t), t)$$

Záměrně zde používáme malé písmeno, neboť s velkým písmenem budeme později psát jinak zavedený lagrangeovský tenzor napětí.

Jak bude ukázáno později, Cauchyho tenzor napětí umožňuje snadno vyjádřit základní pohybové rovnice v *deformovaném* stavu. V řadě aplikací však potřebujeme tyto vztahy a obecně míru napětí vyjádřit v *referenční* konfiguraci. Za tímto účelem se zavádí *první a druhý Piola-Kirchhoffův tenzor napětí* a případně se používají i jiné míry napětí (Biotův tenzor apod.).

První Piola-Kirchhoffův tenzor napětí $\mathbf{T}^{(1)}$

$$d\vec{a} \cdot \mathbf{t} =: d\vec{A} \cdot \mathbf{T}^{(1)}$$

Piola-Kirchhoffův tenzor napětí

Cauchyho tenzor napětí charakterizuje povrchovou sílu působící na *deformovaný* element plochy:

$$\vec{t}_{(\vec{n})} da = (\vec{n} \cdot \mathbf{t}) da = d\vec{a} \cdot \mathbf{t}$$

Lagrangeovský Cauchyho tenzor napětí = Cauchyho tenzor vyjádřený v souřadnicích $\vec{X}$:

$$\mathbf{t}(\vec{X}, t) := \mathbf{t}(\vec{x}(\vec{X}, t), t)$$

Záměrně zde používáme malé písmeno, neboť s velkým písmenem budeme později psát jinak zavedený lagrangeovský tenzor napětí.

Jak bude ukázáno později, Cauchyho tenzor napětí umožňuje snadno vyjádřit základní pohybové rovnice v *deformovaném* stavu. V řadě aplikací však potřebujeme tyto vztahy a obecně míru napětí vyjádřit v *referenční* konfiguraci. Za tímto účelem se zavádí *první a druhý Piola-Kirchhoffův tenzor napětí* a případně se používají i jiné míry napětí (Biotův tenzor apod.).

První Piola-Kirchhoffův tenzor napětí $\mathbf{T}^{(1)}$

$$d\vec{a} \cdot \mathbf{t} =: d\vec{A} \cdot \mathbf{T}^{(1)}$$

První Piola-Kirchhoffův tenzor napětí vyjadřuje sílu působící na deformovanou plochu $d\vec{a}$ v bodě $\vec{x}$ pomocí referenčního elementu plochy $d\vec{A}$ v bodě $\vec{X}$.

Piola-Kirchhoffův tenzor napětí

Cauchyho tenzor napětí charakterizuje povrchovou sílu působící na *deformovaný* element plochy:

$$\vec{t}_{(\vec{n})} da = (\vec{n} \cdot \mathbf{t}) da = d\vec{a} \cdot \mathbf{t}$$

Lagrangeovský Cauchyho tenzor napětí = Cauchyho tenzor vyjádřený v souřadnicích $\vec{X}$:

$$\mathbf{t}(\vec{X}, t) := \mathbf{t}(\vec{x}(\vec{X}, t), t)$$

Záměrně zde používáme malé písmeno, neboť s velkým písmenem budeme později psát jinak zavedený lagrangeovský tenzor napětí.

Jak bude ukázáno později, Cauchyho tenzor napětí umožňuje snadno vyjádřit základní pohybové rovnice v *deformovaném* stavu. V řadě aplikací však potřebujeme tyto vztahy a obecně míru napětí vyjádřit v *referenční* konfiguraci. Za tímto účelem se zavádí *první a druhý Piola-Kirchhoffův tenzor napětí* a případně se používají i jiné míry napětí (Biotův tenzor apod.).

První Piola-Kirchhoffův tenzor napětí $\mathbf{T}^{(1)}$

$$d\vec{a} \cdot \mathbf{t} =: d\vec{A} \cdot \mathbf{T}^{(1)}$$

První Piola-Kirchhoffův tenzor napětí vyjadřuje sílu působící na deformovanou plochu $d\vec{a}$ v bodě $\vec{x}$ pomocí referenčního elementu plochy $d\vec{A}$ v bodě $\vec{X}$.

Relaci mezi Cauchyovým tenzorem a prvním P-K tenzorem získáme pomocí vztahu $d\vec{a} = J\mathbf{F}^{-T} \cdot d\vec{A}$, který jsme odvodili v části Geometrie deformace:

Piola-Kirchhoffův tenzor napětí

Cauchyho tenzor napětí charakterizuje povrchovou sílu působící na *deformovaný* element plochy:

$$\vec{t}_{(\vec{n})} da = (\vec{n} \cdot \mathbf{t}) da = d\vec{a} \cdot \mathbf{t}$$

Lagrangeovský Cauchyho tenzor napětí = Cauchyho tenzor vyjádřený v souřadnicích $\vec{X}$:

$$\mathbf{t}(\vec{X}, t) := \mathbf{t}(\vec{x}(\vec{X}, t), t)$$

Záměrně zde používáme malé písmeno, neboť s velkým písmenem budeme později psát jinak zavedený lagrangeovský tenzor napětí.

Jak bude ukázáno později, Cauchyho tenzor napětí umožňuje snadno vyjádřit základní pohybové rovnice v *deformovaném* stavu. V řadě aplikací však potřebujeme tyto vztahy a obecně míru napětí vyjádřit v *referenční* konfiguraci. Za tímto účelem se zavádí *první a druhý Piola-Kirchhoffův tenzor napětí* a případně se používají i jiné míry napětí (Biotův tenzor apod.).

První Piola-Kirchhoffův tenzor napětí $\mathbf{T}^{(1)}$

$$d\vec{a} \cdot \mathbf{t} =: d\vec{A} \cdot \mathbf{T}^{(1)}$$

První Piola-Kirchhoffův tenzor napětí vyjadřuje sílu působící na deformovanou plochu $d\vec{a}$ v bodě $\vec{x}$ pomocí referenčního elementu plochy $d\vec{A}$ v bodě $\vec{X}$.

Relaci mezi Cauchyovým tenzorem a prvním P-K tenzorem získáme pomocí vztahu $d\vec{a} = J\mathbf{F}^{-T} \cdot d\vec{A}$, který jsme odvodili v části Geometrie deformace:

$$d\vec{a} \cdot \mathbf{t} = J\mathbf{F}^{-T} \cdot d\vec{A} \cdot \mathbf{t} = d\vec{A} \cdot \mathbf{T}^{(1)} \quad \rightarrow \quad \mathbf{T}^{(1)} = J\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{t} \quad \text{resp.} \quad \mathbf{t} = J^{-1}\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}^{(1)}$$

Piola-Kirchhoffův tenzor napětí

Cauchyho tenzor napětí charakterizuje povrchovou sílu působící na *deformovaný* element plochy:

$$\vec{t}_{(\vec{n})} da = (\vec{n} \cdot \mathbf{t}) da = d\vec{a} \cdot \mathbf{t}$$

Lagrangeovský Cauchyho tenzor napětí = Cauchyho tenzor vyjádřený v souřadnicích $\vec{X}$:

$$\mathbf{t}(\vec{X}, t) := \mathbf{t}(\vec{x}(\vec{X}, t), t)$$

Záměrně zde používáme malé písmeno, neboť s velkým písmenem budeme později psát jinak zavedený lagrangeovský tenzor napětí.

Jak bude ukázáno později, Cauchyho tenzor napětí umožňuje snadno vyjádřit základní pohybové rovnice v *deformovaném* stavu. V řadě aplikací však potřebujeme tyto vztahy a obecně míru napětí vyjádřit v *referenční* konfiguraci. Za tímto účelem se zavádí *první a druhý Piola-Kirchhoffův tenzor napětí* a případně se používají i jiné míry napětí (Biotův tenzor apod.).

První Piola-Kirchhoffův tenzor napětí $\mathbf{T}^{(1)}$

$$d\vec{a} \cdot \mathbf{t} =: d\vec{A} \cdot \mathbf{T}^{(1)}$$

První Piola-Kirchhoffův tenzor napětí vyjadřuje sílu působící na deformovanou plochu $d\vec{a}$ v bodě $\vec{x}$ pomocí referenčního elementu plochy $d\vec{A}$ v bodě $\vec{X}$.

Relaci mezi Cauchyovým tenzorem a prvním P-K tenzorem získáme pomocí vztahu $d\vec{a} = J\mathbf{F}^{-T} \cdot d\vec{A}$, který jsme odvodili v části Geometrie deformace:

$$d\vec{a} \cdot \mathbf{t} = J\mathbf{F}^{-T} \cdot d\vec{A} \cdot \mathbf{t} = d\vec{A} \cdot \mathbf{T}^{(1)} \quad \rightarrow \quad \mathbf{T}^{(1)} = J\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{t} \quad \text{resp.} \quad \mathbf{t} = J^{-1}\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}^{(1)}$$

Složkově: $\mathbf{T}_{Kl}^{(1)} = JX_{K,k}t_{kl}$, $t_{kl} = J^{-1}x_{k,K}\mathbf{T}_{Kl}^{(1)}$

Druhý Piola-Kirchhoffův tenzor napětí $\mathbf{T}^{(2)}$

V analogii ke vztahu $d\vec{X} = \mathbf{F}^{-1} \cdot d\vec{x}$ (Přednáška 01) zavedme

$$\Delta\vec{Z} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \Delta\vec{G} = \mathbf{F}^{-1} \cdot (\vec{t}_{(\vec{n})} da)$$

Druhý Piola-Kirchhoffův tenzor pak definujeme jako $\Delta\vec{Z} =: d\vec{A} \cdot \mathbf{T}^{(2)}$

Srovnej s P-K1:

$$\vec{t}_{(\vec{n})} da =: d\vec{A} \cdot \mathbf{T}^{(1)}$$

Vztah P-K2 a P-K1:

$$d\vec{A} \cdot \mathbf{T}^{(2)} = \mathbf{F}^{-1} \cdot (d\vec{A} \cdot \mathbf{T}^{(1)}) \rightarrow \mathbf{T}^{(2)} = \mathbf{T}^{(1)} \cdot \mathbf{F}^{-T}$$

Vztah P-K2 a Cauchyho tenzoru napětí:

$$\mathbf{T}^{(2)} = \mathbf{T}^{(1)} \cdot \mathbf{F}^{-T} = J\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{t} \cdot \mathbf{F}^{-T}, \quad \mathbf{t} = J^{-1}\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}^{(2)} \cdot \mathbf{F}^T$$

$$\mathbf{T}^{(1)} = J\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{t}$$

Složkově: $T_{KL}^{(2)} = JX_{K,k}X_{L,l}t_{kl}, \quad t_{kl} = J^{-1}x_{k,K}x_{l,L}T_{KL}^{(2)}$

P-K2 a P-K1 v případě malých deformací

$$\mathbf{T}^{(1)} = (1 + \text{tr}\mathbf{H})\mathbf{t} - \mathbf{H}^T \cdot \mathbf{t} + O(|\mathbf{H}|^2)$$

$$\mathbf{T}^{(2)} = (1 + \text{tr}\mathbf{H})\mathbf{t} - \mathbf{H}^T \cdot \mathbf{t} - \mathbf{t} \cdot \mathbf{H} + O(|\mathbf{H}|^2)$$

Přednáška 03:

$$J = \det \mathbf{F} = 1 + \text{tr} \mathbf{H} + O(|\mathbf{H}|^2)$$

$$\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{I} - \mathbf{H}^T + O(|\mathbf{H}|^2)$$

V případě *malých deformací* lze zanedbat také členy řádu $|\mathbf{H}| \cdot |\mathbf{t}|$. Potom

$$\mathbf{T}^{(1)} \approx \mathbf{T}^{(2)} \approx \mathbf{t}$$