

Mechanika kontinua – část 2
Geometrie deformace -
pokračování

V dnešní přednášce:

- **Vztahy pro diferenciální operátory** ve „velkých“ a „malých“ souřadnicích

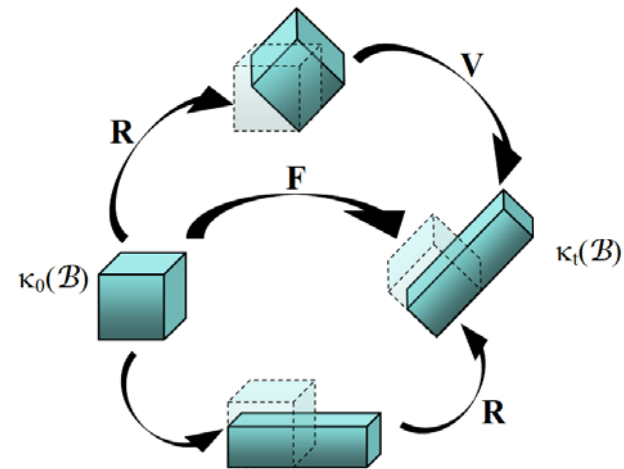
V dnešní přednášce:

- **Vztahy pro diferenciální operátory** ve „velkých“ a „malých“ souřadnicích
- **Polární rozklad** deformačního tenzoru na rotační a deformační část

$\vec{x} = \chi(\vec{X}, t)$... popisuje pohyb tělesa

$d\vec{x} = \mathbf{F} \cdot d\vec{X}$... zahrnuje deformaci i rotaci

$\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R}$... polární rozklad



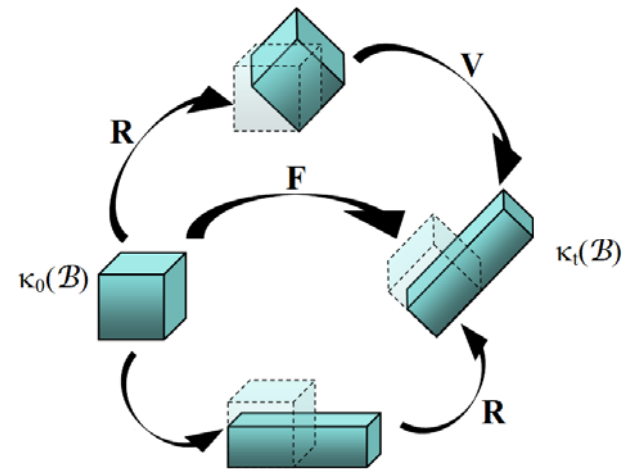
V dnešní přednášce:

- **Vztahy pro diferenciální operátory** ve „velkých“ a „malých“ souřadnicích
- **Polární rozklad** deformačního tenzoru na rotační a deformační část

$\vec{x} = \chi(\vec{X}, t)$... popisuje pohyb tělesa

$d\vec{x} = \mathbf{F} \cdot d\vec{X}$... zahrnuje deformaci i rotaci

$\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R}$... polární rozklad



- **Přehled objektů**, které používáme k popisu deformace

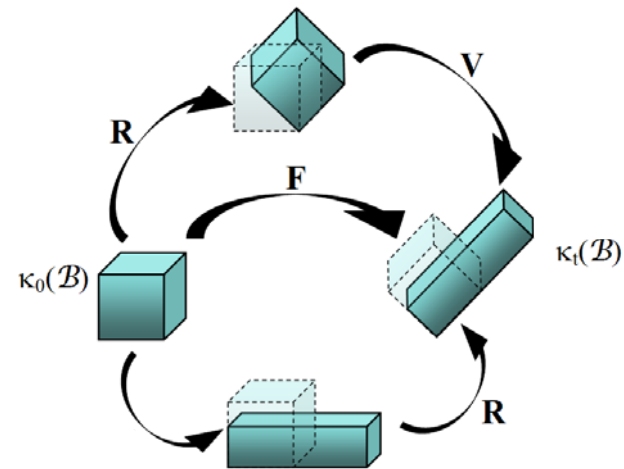
V dnešní přednášce:

- **Vztahy pro diferenciální operátory** ve „velkých“ a „malých“ souřadnicích
- **Polární rozklad** deformačního tenzoru na rotační a deformační část

$\vec{x} = \chi(\vec{X}, t)$... popisuje pohyb tělesa

$d\vec{x} = \mathbf{F} \cdot d\vec{X}$... zahrnuje deformaci i rotaci

$\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R}$... polární rozklad



- **Přehled objektů**, které používáme k popisu deformace
- **Tenzor deformace** a interpretace jeho složek

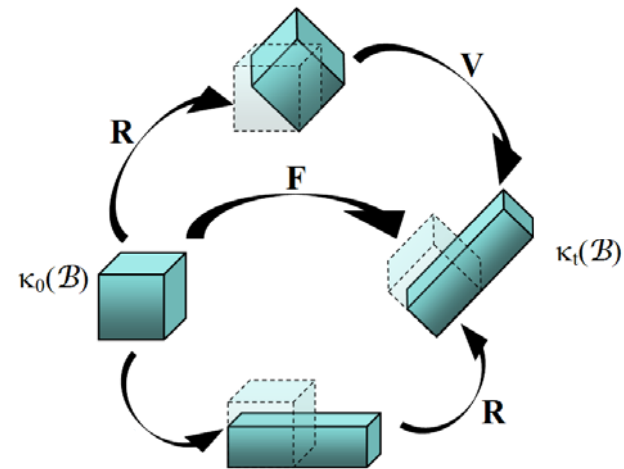
V dnešní přednášce:

- **Vztahy pro diferenciální operátory** ve „velkých“ a „malých“ souřadnicích
- **Polární rozklad** deformačního tenzoru na rotační a deformační část

$\vec{x} = \chi(\vec{X}, t)$... popisuje pohyb tělesa

$d\vec{x} = \mathbf{F} \cdot d\vec{X}$... zahrnuje deformaci i rotaci

$\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R}$... polární rozklad



- **Přehled objektů**, které používáme k popisu deformace
- **Tenzor deformace** a interpretace jeho složek
- **Změny objemu a plochy** při deformaci

Diferenciální operátory v prostorových a materiálových souřadnicích

Notace

Operátory píšeme velkým nebo malým písmenem podle toho, zda derivujeme podle materiálových (X_1, X_2, X_3) nebo prostorových (x_1, x_2, x_3) souřadnic:

$$\text{Grad} = \vec{E}_K \frac{\partial}{\partial X_K} \otimes, \quad \text{grad} = \vec{e}_k \frac{\partial}{\partial x_k} \otimes, \quad \text{Div} = \vec{E}_K \frac{\partial}{\partial X_K} \cdot, \quad \text{div} = \vec{e}_k \frac{\partial}{\partial x_k} \cdot$$

Indexy psané velkými/malými písmeny značí složky v bázi $\{\vec{E}_K\}/\{\vec{e}_k\}$.

Diferenciální operátory v prostorových a materiálových souřadnicích

Notace

Operátory píšeme velkým nebo malým písmenem podle toho, zda derivujeme podle materiálových (X_1, X_2, X_3) nebo prostorových (x_1, x_2, x_3) souřadnic:

$$\text{Grad} = \vec{E}_K \frac{\partial}{\partial X_K} \otimes, \quad \text{grad} = \vec{e}_k \frac{\partial}{\partial x_k} \otimes, \quad \text{Div} = \vec{E}_K \frac{\partial}{\partial X_K} \cdot, \quad \text{div} = \vec{e}_k \frac{\partial}{\partial x_k} \cdot$$

Indexy psané velkými/malými písmeny značí složky v bázi $\{\vec{E}_K\}/\{\vec{e}_k\}$.

Platí následující vztahy:

$$\text{grad} \bullet = \mathbf{F}^{-T} \cdot \text{Grad} \bullet$$

$$\text{div} \bullet = \mathbf{F}^{-T} : \text{Grad} \bullet$$

$$\text{div grad} \bullet = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{F}^{-T} : \text{Grad Grad} \bullet + \text{div} \mathbf{F}^{-T} \cdot \text{Grad} \bullet$$

$$\text{Grad} \bullet = \mathbf{F}^T \cdot \text{grad} \bullet$$

$$\text{Div} \bullet = \mathbf{F}^T : \text{grad} \bullet$$

$$\text{Div Grad} \bullet = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T : \text{grad grad} \bullet + \text{Div} \mathbf{F}^T \cdot \text{grad} \bullet$$

$$\text{div} \vec{v} = \mathbf{F}^{-T} : \text{Grad} \vec{V}$$

Další užitečné vztahy

04

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{F} = \mathbf{I}$$

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{F} = \mathbf{I}$$

$$\text{Důkaz: } \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{-1} = \frac{\partial x_k}{\partial X_K} (\vec{e}_k \otimes \vec{E}_K) \cdot \frac{\partial X_L}{\partial x_l} (\vec{E}_L \otimes \vec{e}_l)$$

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{F} = \mathbf{I}$$

$$\text{Důkaz: } \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{-1} = \frac{\partial x_k}{\partial X_K} (\vec{e}_k \otimes \vec{E}_K) \cdot \frac{\partial X_L}{\partial x_l} (\vec{E}_L \otimes \vec{e}_l) = \frac{\partial x_k}{\partial X_K} \frac{\partial X_L}{\partial x_l} (\vec{e}_k \otimes \vec{E}_K) \cdot (\vec{E}_L \otimes \vec{e}_l)$$

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{F} = \mathbf{I}$$

$$\begin{aligned} \text{Důkaz: } \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{-1} &= \frac{\partial x_k}{\partial X_K} (\vec{e}_k \otimes \vec{E}_K) \cdot \frac{\partial X_L}{\partial x_l} (\vec{E}_L \otimes \vec{e}_l) = \frac{\partial x_k}{\partial X_K} \frac{\partial X_L}{\partial x_l} (\vec{e}_k \otimes \vec{E}_K) \cdot (\vec{E}_L \otimes \vec{e}_l) = \\ &= \frac{\partial x_k}{\partial X_K} \frac{\partial X_L}{\partial x_l} \delta_{KL} (\vec{e}_k \otimes \vec{e}_l) \end{aligned}$$

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{F} = \mathbf{I}$$

$$\begin{aligned} \text{Důkaz: } \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{-1} &= \frac{\partial x_k}{\partial X_K} (\vec{e}_k \otimes \vec{E}_K) \cdot \frac{\partial X_L}{\partial x_l} (\vec{E}_L \otimes \vec{e}_l) = \frac{\partial x_k}{\partial X_K} \frac{\partial X_L}{\partial x_l} (\vec{e}_k \otimes \vec{E}_K) \cdot (\vec{E}_L \otimes \vec{e}_l) = \\ &= \frac{\partial x_k}{\partial X_K} \frac{\partial X_L}{\partial x_l} \delta_{KL} (\vec{e}_k \otimes \vec{e}_l) = \frac{\partial x_k}{\partial X_K} \frac{\partial X_K}{\partial x_l} (\vec{e}_k \otimes \vec{e}_l) \end{aligned}$$

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{F} = \mathbf{I}$$

$$\begin{aligned} \text{Důkaz: } \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{-1} &= \frac{\partial x_k}{\partial X_K} (\vec{e}_k \otimes \vec{E}_K) \cdot \frac{\partial X_L}{\partial x_l} (\vec{E}_L \otimes \vec{e}_l) = \frac{\partial x_k}{\partial X_K} \frac{\partial X_L}{\partial x_l} (\vec{e}_k \otimes \vec{E}_K) \cdot (\vec{E}_L \otimes \vec{e}_l) = \\ &= \frac{\partial x_k}{\partial X_K} \frac{\partial X_L}{\partial x_l} \delta_{KL} (\vec{e}_k \otimes \vec{e}_l) = \frac{\partial x_k}{\partial X_K} \frac{\partial X_K}{\partial x_l} (\vec{e}_k \otimes \vec{e}_l) = \frac{\partial x_k}{\partial x_l} (\vec{e}_k \otimes \vec{e}_l) \end{aligned}$$

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{F} = \mathbf{I}$$

$$\begin{aligned} \text{Důkaz: } \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{-1} &= \frac{\partial x_k}{\partial X_K} (\vec{e}_k \otimes \vec{E}_K) \cdot \frac{\partial X_L}{\partial x_l} (\vec{E}_L \otimes \vec{e}_l) = \frac{\partial x_k}{\partial X_K} \frac{\partial X_L}{\partial x_l} (\vec{e}_k \otimes \vec{E}_K) \cdot (\vec{E}_L \otimes \vec{e}_l) = \\ &= \frac{\partial x_k}{\partial X_K} \frac{\partial X_L}{\partial x_l} \delta_{KL} (\vec{e}_k \otimes \vec{e}_l) = \frac{\partial x_k}{\partial X_K} \frac{\partial X_K}{\partial x_l} (\vec{e}_k \otimes \vec{e}_l) = \frac{\partial x_k}{\partial x_l} (\vec{e}_k \otimes \vec{e}_l) = \delta_{kl} (\vec{e}_k \otimes \vec{e}_l) = \mathbf{I} \end{aligned}$$

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{F} = \mathbf{I}$$

$$\begin{aligned} \text{Důkaz: } \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{-1} &= \frac{\partial x_k}{\partial X_K} (\vec{e}_k \otimes \vec{E}_K) \cdot \frac{\partial X_L}{\partial x_l} (\vec{E}_L \otimes \vec{e}_l) = \frac{\partial x_k}{\partial X_K} \frac{\partial X_L}{\partial x_l} (\vec{e}_k \otimes \vec{E}_K) \cdot (\vec{E}_L \otimes \vec{e}_l) = \\ &= \frac{\partial x_k}{\partial X_K} \frac{\partial X_L}{\partial x_l} \delta_{KL} (\vec{e}_k \otimes \vec{e}_l) = \frac{\partial x_k}{\partial X_K} \frac{\partial X_K}{\partial x_l} (\vec{e}_k \otimes \vec{e}_l) = \frac{\partial x_k}{\partial x_l} (\vec{e}_k \otimes \vec{e}_l) = \delta_{kl} (\vec{e}_k \otimes \vec{e}_l) = \mathbf{I} \end{aligned}$$

$$\frac{dJ}{d\mathbf{F}} = J\mathbf{F}^{-T}, \quad \text{Div}(J\mathbf{F}^{-1}) = \vec{0}, \quad \text{div}(J^{-1}\mathbf{F}) = \vec{0}, \quad \text{kde } J := \det \mathbf{F}$$

$$J(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} = [(\mathbf{F} \cdot \vec{A}) \times (\mathbf{F} \cdot \vec{B})] \cdot (\mathbf{F} \cdot \vec{C})$$

$$J\mathbf{F}^{-T} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = (\mathbf{F} \cdot \vec{A}) \times (\mathbf{F} \cdot \vec{B})$$

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{F} = \mathbf{I}$$

$$\frac{dJ}{d\mathbf{F}} = J\mathbf{F}^{-T}, \quad \text{Div}(J\mathbf{F}^{-1}) = \vec{0}, \quad \text{div}(J^{-1}\mathbf{F}) = \vec{0}, \quad \text{kde } J := \det \mathbf{F}$$

$$J(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} = [(\mathbf{F} \cdot \vec{A}) \times (\mathbf{F} \cdot \vec{B})] \cdot (\mathbf{F} \cdot \vec{C})$$

$$J\mathbf{F}^{-T} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = (\mathbf{F} \cdot \vec{A}) \times (\mathbf{F} \cdot \vec{B})$$

Důkaz prvního tvrzení:

$$\frac{dJ}{d\mathbf{F}} = \frac{\partial J}{\partial F_{jJ}} (\vec{e}_j \otimes \vec{E}_J) = \frac{1}{3!} \epsilon_{KLM} \epsilon_{klm} \frac{\partial}{\partial F_{jJ}} (F_{kK} F_{lL} F_{mM}) (\vec{e}_j \otimes \vec{E}_J) =$$

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{F} = \mathbf{I}$$

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{d\mathbf{F}} &= J\mathbf{F}^{-T}, \quad \text{Div}(J\mathbf{F}^{-1}) = \vec{0}, \quad \text{div}(J^{-1}\mathbf{F}) = \vec{0}, \quad \text{kde } J := \det \mathbf{F} \\ J(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} &= [(\mathbf{F} \cdot \vec{A}) \times (\mathbf{F} \cdot \vec{B})] \cdot (\mathbf{F} \cdot \vec{C}) \\ J\mathbf{F}^{-T} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) &= (\mathbf{F} \cdot \vec{A}) \times (\mathbf{F} \cdot \vec{B}) \end{aligned}$$

Důkaz prvního tvrzení:

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{d\mathbf{F}} &= \frac{\partial J}{\partial F_{jJ}} (\vec{e}_j \otimes \vec{E}_J) = \frac{1}{3!} \epsilon_{KLM} \epsilon_{klm} \frac{\partial}{\partial F_{jJ}} (F_{kK} F_{lL} F_{mM}) (\vec{e}_j \otimes \vec{E}_J) = \\ &= \frac{1}{3!} \epsilon_{KLM} \epsilon_{klm} \left(\frac{\partial F_{kK}}{\partial F_{jJ}} F_{lL} F_{mM} + F_{kK} \frac{\partial F_{lL}}{\partial F_{jJ}} F_{mM} + F_{kK} F_{lL} \frac{\partial F_{mM}}{\partial F_{jJ}} \right) (\vec{e}_j \otimes \vec{E}_J) = \end{aligned}$$

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{F} = \mathbf{I}$$

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{d\mathbf{F}} &= J\mathbf{F}^{-T}, \quad \text{Div}(J\mathbf{F}^{-1}) = \vec{0}, \quad \text{div}(J^{-1}\mathbf{F}) = \vec{0}, \quad \text{kde } J := \det \mathbf{F} \\ J(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} &= [(\mathbf{F} \cdot \vec{A}) \times (\mathbf{F} \cdot \vec{B})] \cdot (\mathbf{F} \cdot \vec{C}) \\ J\mathbf{F}^{-T} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) &= (\mathbf{F} \cdot \vec{A}) \times (\mathbf{F} \cdot \vec{B}) \end{aligned}$$

Důkaz prvního tvrzení:

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{d\mathbf{F}} &= \frac{\partial J}{\partial F_{jJ}} (\vec{e}_j \otimes \vec{E}_J) = \frac{1}{3!} \epsilon_{KLM} \epsilon_{klm} \frac{\partial}{\partial F_{jJ}} (F_{kK} F_{lL} F_{mM}) (\vec{e}_j \otimes \vec{E}_J) = \\ &= \frac{1}{3!} \epsilon_{KLM} \epsilon_{klm} \left(\frac{\partial F_{kK}}{\partial F_{jJ}} F_{lL} F_{mM} + F_{kK} \frac{\partial F_{lL}}{\partial F_{jJ}} F_{mM} + F_{kK} F_{lL} \frac{\partial F_{mM}}{\partial F_{jJ}} \right) (\vec{e}_j \otimes \vec{E}_J) = \\ &= \frac{1}{3!} \epsilon_{KLM} \epsilon_{klm} (\delta_{jk} \delta_{JK} F_{lL} F_{mM} + \delta_{jl} \delta_{JL} F_{kK} F_{mM} + \delta_{jm} \delta_{JM} F_{kK} F_{lL}) (\vec{e}_j \otimes \vec{E}_J) = \end{aligned}$$

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{F} = \mathbf{I}$$

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{d\mathbf{F}} &= J\mathbf{F}^{-T}, \quad \text{Div}(J\mathbf{F}^{-1}) = \vec{0}, \quad \text{div}(J^{-1}\mathbf{F}) = \vec{0}, \quad \text{kde } J := \det \mathbf{F} \\ J(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} &= [(\mathbf{F} \cdot \vec{A}) \times (\mathbf{F} \cdot \vec{B})] \cdot (\mathbf{F} \cdot \vec{C}) \\ J\mathbf{F}^{-T} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) &= (\mathbf{F} \cdot \vec{A}) \times (\mathbf{F} \cdot \vec{B}) \end{aligned}$$

Důkaz prvního tvrzení:

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{d\mathbf{F}} &= \frac{\partial J}{\partial F_{jJ}} (\vec{e}_j \otimes \vec{E}_J) = \frac{1}{3!} \epsilon_{KLM} \epsilon_{klm} \frac{\partial}{\partial F_{jJ}} (F_{kK} F_{lL} F_{mM}) (\vec{e}_j \otimes \vec{E}_J) = \\ &= \frac{1}{3!} \epsilon_{KLM} \epsilon_{klm} \left(\frac{\partial F_{kK}}{\partial F_{jJ}} F_{lL} F_{mM} + F_{kK} \frac{\partial F_{lL}}{\partial F_{jJ}} F_{mM} + F_{kK} F_{lL} \frac{\partial F_{mM}}{\partial F_{jJ}} \right) (\vec{e}_j \otimes \vec{E}_J) = \\ &= \frac{1}{3!} \epsilon_{KLM} \epsilon_{klm} (\delta_{jk} \delta_{JK} F_{lL} F_{mM} + \delta_{jl} \delta_{JL} F_{kK} F_{mM} + \delta_{jm} \delta_{JM} F_{kK} F_{lL}) (\vec{e}_j \otimes \vec{E}_J) = \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_{JLM} \epsilon_{jlm} F_{lL} F_{mM} (\vec{e}_j \otimes \vec{E}_J) \end{aligned}$$

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{F} = \mathbf{I}$$

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{d\mathbf{F}} &= J\mathbf{F}^{-T}, \quad \text{Div}(J\mathbf{F}^{-1}) = \vec{0}, \quad \text{div}(J^{-1}\mathbf{F}) = \vec{0}, \quad \text{kde } J := \det \mathbf{F} \\ J(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} &= [(\mathbf{F} \cdot \vec{A}) \times (\mathbf{F} \cdot \vec{B})] \cdot (\mathbf{F} \cdot \vec{C}) \\ J\mathbf{F}^{-T} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) &= (\mathbf{F} \cdot \vec{A}) \times (\mathbf{F} \cdot \vec{B}) \end{aligned}$$

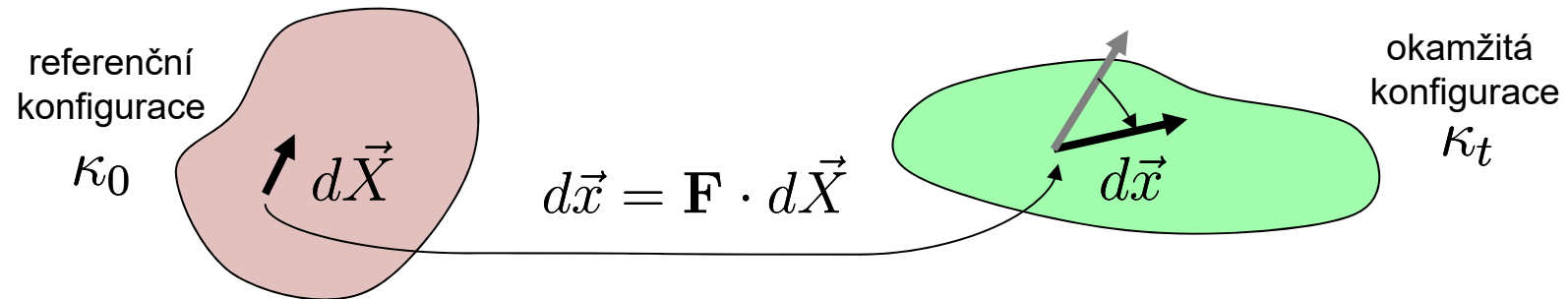
Důkaz prvního tvrzení:

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{d\mathbf{F}} &= \frac{\partial J}{\partial F_{jJ}} (\vec{e}_j \otimes \vec{E}_J) = \frac{1}{3!} \epsilon_{KLM} \epsilon_{klm} \frac{\partial}{\partial F_{jJ}} (F_{kK} F_{lL} F_{mM}) (\vec{e}_j \otimes \vec{E}_J) = \\ &= \frac{1}{3!} \epsilon_{KLM} \epsilon_{klm} \left(\frac{\partial F_{kK}}{\partial F_{jJ}} F_{lL} F_{mM} + F_{kK} \frac{\partial F_{lL}}{\partial F_{jJ}} F_{mM} + F_{kK} F_{lL} \frac{\partial F_{mM}}{\partial F_{jJ}} \right) (\vec{e}_j \otimes \vec{E}_J) = \\ &= \frac{1}{3!} \epsilon_{KLM} \epsilon_{klm} (\delta_{jk} \delta_{JK} F_{lL} F_{mM} + \delta_{jl} \delta_{JL} F_{kK} F_{mM} + \delta_{jm} \delta_{JM} F_{kK} F_{lL}) (\vec{e}_j \otimes \vec{E}_J) = \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_{JLM} \epsilon_{jlm} F_{lL} F_{mM} (\vec{e}_j \otimes \vec{E}_J) = \text{cofactor}(\mathbf{F}) = J\mathbf{F}^{-T} \end{aligned}$$

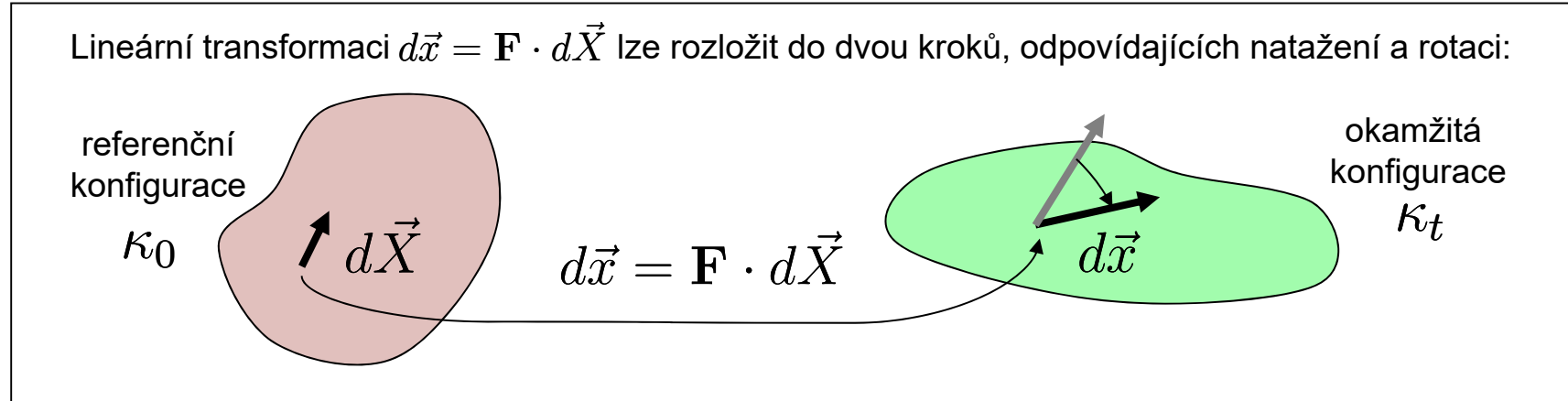
Polární rozklad deformačního gradientu

Analogie polárního rozkladu komplexního čísla: $z = x + iy = re^{i\phi}$, kde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\phi = \arctan(y/x)$

Lineární transformaci $d\vec{x} = \mathbf{F} \cdot d\vec{X}$ lze rozložit do dvou kroků, odpovídajících natažení a rotaci:



Polární rozklad deformačního gradientu



Věta o polárním rozkladu tenzoru $\mathbf{F}$, ($\det \mathbf{F} \neq 0$) :

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R}$$

kde

1. $\mathbf{U}$ a $\mathbf{V}$ jsou symetrické a pozitivně definitní tenzory.
2. Tenzor $\mathbf{R}$ je ortogonální, tj. $\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^T = \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R} = \mathbf{I}$, a jedná se tedy o **rotační tenzor**.
3. $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ a $\mathbf{R}$ jsou určeny jednoznačně.
4. $\mathbf{U}$ a $\mathbf{V}$ mají stejná vlastní čísla. Je-li $\vec{k}$ vlastní vektor matice $\mathbf{U}$, pak $\mathbf{R} \cdot \vec{k}$ je vlastní vektor matice $\mathbf{V}$.

Polární rozklad deformačního gradientu – důkaz

06

Důkaz provedeme tak, že „uhádneme“ tvar matic $\mathbf{U}$ a $\mathbf{V}$ a pak ukážeme, že $\mathbf{R}$ je rotační matice.

Polární rozklad deformačního gradientu – důkaz

Důkaz provedeme tak, že „uhádneme“ tvar matic $\mathbf{U}$ a $\mathbf{V}$ a pak ukážeme, že $\mathbf{R}$ je rotační matice. Při důkazu použijeme následující vlastnosti a vztahy:

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T$$

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}$$

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \cdot \mathbf{D}) = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) \cdot \mathbf{D}$$

Pro rotační matici platí $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$, $\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^T = \mathbf{I}$.

$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T$ je symetrická matice.

Pro symetrickou matici platí $\mathbf{S}^T = \mathbf{S}$, $\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}^{-T}$.

Polární rozklad deformačního gradientu – důkaz

Důkaz provedeme tak, že „uhádneme“ tvar matic $\mathbf{U}$ a $\mathbf{V}$ a pak ukážeme, že $\mathbf{R}$ je rotační matice. Při důkazu použijeme následující vlastnosti a vztahy:

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T$$

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}$$

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \cdot \mathbf{D}) = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) \cdot \mathbf{D}$$

Pro rotační matici platí $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$, $\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^T = \mathbf{I}$.

$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T$ je symetrická matice.

Pro symetrickou matici platí $\mathbf{S}^T = \mathbf{S}$, $\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}^{-T}$.

Důkaz: Krok 1

Zavedme tenzor $\mathbf{C} := \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}$.

Polární rozklad deformačního gradientu – důkaz

Důkaz provedeme tak, že „uhádneme“ tvar matic $\mathbf{U}$ a $\mathbf{V}$ a pak ukážeme, že $\mathbf{R}$ je rotační matice. Při důkazu použijeme následující vlastnosti a vztahy:

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T$$

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}$$

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \cdot \mathbf{D}) = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) \cdot \mathbf{D}$$

Pro rotační matici platí $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$, $\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^T = \mathbf{I}$.

$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T$ je symetrická matice.

Pro symetrickou matici platí $\mathbf{S}^T = \mathbf{S}$, $\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}^{-T}$.

Důkaz: Krok 1

Zavedme tenzor $\mathbf{C} := \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}$

Platí, že $\det \mathbf{F} \neq 0 \Rightarrow \mathbf{F} \cdot \vec{v} \neq 0$ pro $\vec{v} \neq 0$.

Polární rozklad deformačního gradientu – důkaz

Důkaz provedeme tak, že „uhádneme“ tvar matic $\mathbf{U}$ a $\mathbf{V}$ a pak ukážeme, že $\mathbf{R}$ je rotační matice. Při důkazu použijeme následující vlastnosti a vztahy:

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T$$

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}$$

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \cdot \mathbf{D}) = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) \cdot \mathbf{D}$$

Pro rotační matici platí $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$, $\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^T = \mathbf{I}$.

$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T$ je symetrická matice.

Pro symetrickou matici platí $\mathbf{S}^T = \mathbf{S}$, $\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}^{-T}$.

Důkaz: Krok 1

Zavedme tenzor $\mathbf{C} := \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}$.

Platí, že $\det \mathbf{F} \neq 0 \Rightarrow \mathbf{F} \cdot \vec{v} \neq 0$ pro $\vec{v} \neq 0$.

Potom $0 < (\mathbf{F} \cdot \vec{v}) \cdot (\mathbf{F} \cdot \vec{v}) = \vec{v} \cdot \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \mathbf{C} \cdot \vec{v} \rightarrow \mathbf{C}$ je pozitivně definitní.

Polární rozklad deformačního gradientu – důkaz

Důkaz provedeme tak, že „uhádneme“ tvar matic $\mathbf{U}$ a $\mathbf{V}$ a pak ukážeme, že $\mathbf{R}$ je rotační matice. Při důkazu použijeme následující vlastnosti a vztahy:

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T$$

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}$$

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \cdot \mathbf{D}) = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) \cdot \mathbf{D}$$

Pro rotační matici platí $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$, $\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^T = \mathbf{I}$.

$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T$ je symetrická matice.

Pro symetrickou matici platí $\mathbf{S}^T = \mathbf{S}$, $\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}^{-T}$.

Důkaz: Krok 1

Zavedme tenzor $\mathbf{C} := \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}$.

Platí, že $\det \mathbf{F} \neq 0 \Rightarrow \mathbf{F} \cdot \vec{v} \neq 0$ pro $\vec{v} \neq 0$.

Potom $0 < (\mathbf{F} \cdot \vec{v}) \cdot (\mathbf{F} \cdot \vec{v}) = \vec{v} \cdot \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \mathbf{C} \cdot \vec{v} \rightarrow \mathbf{C}$ je pozitivně definitní.

Zavedme dále tenzory

$$\mathbf{U} := \sqrt{\mathbf{C}} = \sqrt{\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}}, \quad \mathbf{V} := \sqrt{\mathbf{b}} = \sqrt{\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T}$$

Polární rozklad deformačního gradientu – důkaz

Důkaz provedeme tak, že „uhádneme“ tvar matic $\mathbf{U}$ a $\mathbf{V}$ a pak ukážeme, že $\mathbf{R}$ je rotační matice. Při důkazu použijeme následující vlastnosti a vztahy:

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T$$

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}$$

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \cdot \mathbf{D}) = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) \cdot \mathbf{D}$$

Pro rotační matici platí $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$, $\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^T = \mathbf{I}$.

$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T$ je symetrická matice.

Pro symetrickou matici platí $\mathbf{S}^T = \mathbf{S}$, $\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}^{-T}$.

Důkaz: Krok 1

Zavedme tenzor $\mathbf{C} := \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}$.

Platí, že $\det \mathbf{F} \neq 0 \Rightarrow \mathbf{F} \cdot \vec{v} \neq 0$ pro $\vec{v} \neq 0$.

Potom $0 < (\mathbf{F} \cdot \vec{v}) \cdot (\mathbf{F} \cdot \vec{v}) = \vec{v} \cdot \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \mathbf{C} \cdot \vec{v} \rightarrow \mathbf{C}$ je pozitivně definitní.

Zavedme dále tenzory

$$\mathbf{U} := \sqrt{\mathbf{C}} = \sqrt{\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}}, \quad \mathbf{V} := \sqrt{\mathbf{b}} = \sqrt{\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T}$$

↑
Right stretch tensor

↑
Left stretch tensor

Polární rozklad deformačního gradientu – důkaz

Důkaz provedeme tak, že „uhádneme“ tvar matic $\mathbf{U}$ a $\mathbf{V}$ a pak ukážeme, že $\mathbf{R}$ je rotační matice. Při důkazu použijeme následující vlastnosti a vztahy:

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T$$

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}$$

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \cdot \mathbf{D}) = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) \cdot \mathbf{D}$$

Pro rotační matici platí $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$, $\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^T = \mathbf{I}$.

$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T$ je symetrická matice.

Pro symetrickou matici platí $\mathbf{S}^T = \mathbf{S}$, $\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}^{-T}$.

Důkaz: Krok 1

Zavedme tenzor $\mathbf{C} := \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}$.

Platí, že $\det \mathbf{F} \neq 0 \Rightarrow \mathbf{F} \cdot \vec{v} \neq 0$ pro $\vec{v} \neq 0$.

Potom $0 < (\mathbf{F} \cdot \vec{v}) \cdot (\mathbf{F} \cdot \vec{v}) = \vec{v} \cdot \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \mathbf{C} \cdot \vec{v} \rightarrow \mathbf{C}$ je pozitivně definitní.

Zavedme dále tenzory

$$\mathbf{U} := \sqrt{\mathbf{C}} = \sqrt{\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}}, \quad \mathbf{V} := \sqrt{\mathbf{b}} = \sqrt{\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T}$$

↑
Right stretch tensor

↑
Left stretch tensor

Nyní ukážeme, že pro takto zavedené $\mathbf{U}$ a $\mathbf{V}$ je vztah $\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R}$ splněn a $\mathbf{R}$ rotační matice.

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T$$

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}$$

Nápověda

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \cdot \mathbf{D}) = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) \cdot \mathbf{D}$$

Pro rotační matici platí $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$, $\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^T = \mathbf{I}$.

$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T$ je symetrická matice.

Pro symetrickou matici platí $\mathbf{S}^T = \mathbf{S}$, $\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}^{-T}$.

Krok 2:

Dokazované tvrzení má tvar:

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U}$$

Tenzory $\mathbf{U}$ a $\mathbf{V}$ jsme zavedli následovně:

$$\mathbf{U} := \sqrt{\mathbf{C}} = \sqrt{\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}}$$

Nyní zavedeme tenzory

$$\tilde{\mathbf{R}} := \mathbf{V}^{-1} \cdot \mathbf{F}, \quad \mathbf{R} := \mathbf{F} \cdot \mathbf{U}^{-1}$$

a ukážeme, že

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^T = \mathbf{I}, \quad \tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{R}$$

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T$$

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}$$

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \cdot \mathbf{D}) = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) \cdot \mathbf{D}$$

Pro rotační matici platí $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$, $\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^T = \mathbf{I}$.

$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T$ je symetrická matice.

Pro symetrickou matici platí $\mathbf{S}^T = \mathbf{S}$, $\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}^{-T}$.

Nápověda

Krok 2:

Dokazované tvrzení má tvar:

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U}$$

Tenzory $\mathbf{U}$ a $\mathbf{V}$ jsme zavedli následovně:

$$\mathbf{U} := \sqrt{\mathbf{C}} = \sqrt{\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}}$$

Nyní zavedeme tenzory

$$\tilde{\mathbf{R}} := \mathbf{V}^{-1} \cdot \mathbf{F}, \quad \mathbf{R} := \mathbf{F} \cdot \mathbf{U}^{-1}$$

a ukážeme, že

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^T = \mathbf{I}, \quad \tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{R}$$

Krok 3:

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^T = (\mathbf{F} \cdot \mathbf{U}^{-1}) \cdot (\mathbf{F} \cdot \mathbf{U}^{-1})^T = \mathbf{F} \cdot (\mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{U}^{-1}) \cdot \mathbf{F}^T = \mathbf{F} \cdot \mathbf{U}^{-2} \cdot \mathbf{F}^T = \mathbf{F} \cdot (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F})^{-1} \cdot \mathbf{F}^T = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{F}^T = \mathbf{I}$$

↑
tenzor je symetrický

a analogicky pro $\tilde{\mathbf{R}}$. $\mathbf{R}$ a $\tilde{\mathbf{R}}$ jsou tedy **ortogonální matice** a platí $\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{V} \cdot \tilde{\mathbf{R}}$.

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T$$

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}$$

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \cdot \mathbf{D}) = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) \cdot \mathbf{D}$$

Pro rotační matici platí $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$, $\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^T = \mathbf{I}$.

$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T$ je symetrická matice.

Pro symetrickou matici platí $\mathbf{S}^T = \mathbf{S}$, $\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}^{-T}$.

Nápověda

Krok 2:

Dokazované tvrzení má tvar:

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U}$$

Tenzory $\mathbf{U}$ a $\mathbf{V}$ jsme zavedli následovně:

$$\mathbf{U} := \sqrt{\mathbf{C}} = \sqrt{\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}}$$

Nyní zavedeme tenzory

$$\tilde{\mathbf{R}} := \mathbf{V}^{-1} \cdot \mathbf{F}, \quad \mathbf{R} := \mathbf{F} \cdot \mathbf{U}^{-1}$$

a ukážeme, že

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^T = \mathbf{I}, \quad \tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{R}$$

Krok 3:

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^T = (\mathbf{F} \cdot \mathbf{U}^{-1}) \cdot (\mathbf{F} \cdot \mathbf{U}^{-1})^T = \mathbf{F} \cdot (\mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{U}^{-1}) \cdot \mathbf{F}^T = \mathbf{F} \cdot \mathbf{U}^{-2} \cdot \mathbf{F}^T = \mathbf{F} \cdot (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F})^{-1} \cdot \mathbf{F}^T = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{F}^T = \mathbf{I}$$

↑
tenzor je symetrický

a analogicky pro $\tilde{\mathbf{R}}$. $\mathbf{R}$ a $\tilde{\mathbf{R}}$ jsou tedy **ortogonální matice** a platí $\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{V} \cdot \tilde{\mathbf{R}}$.

Nyní ukážeme, že $\tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{R}$:

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{V} \cdot \tilde{\mathbf{R}} = (\tilde{\mathbf{R}} \cdot \tilde{\mathbf{R}}^T) \cdot \mathbf{V} \cdot \tilde{\mathbf{R}} = \tilde{\mathbf{R}} \cdot (\tilde{\mathbf{R}}^T \cdot \mathbf{V} \cdot \tilde{\mathbf{R}}) = \tilde{\mathbf{R}} \cdot \tilde{\mathbf{U}} \Rightarrow \mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \tilde{\mathbf{R}} \cdot \tilde{\mathbf{U}}$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} = \mathbf{U}^2 = (\tilde{\mathbf{R}} \cdot \tilde{\mathbf{U}})^T \cdot (\tilde{\mathbf{R}} \cdot \tilde{\mathbf{U}}) = \tilde{\mathbf{U}} \cdot (\tilde{\mathbf{R}}^T \cdot \tilde{\mathbf{R}}) \cdot \tilde{\mathbf{U}} = \tilde{\mathbf{U}}^2 \Rightarrow \tilde{\mathbf{U}} = \mathbf{U} \Rightarrow \tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{R}$$

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T$$

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}$$

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \cdot \mathbf{D}) = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) \cdot \mathbf{D}$$

Pro rotační matici platí $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$, $\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^T = \mathbf{I}$.

$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T$ je symetrická matice.

Pro symetrickou matici platí $\mathbf{S}^T = \mathbf{S}$, $\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}^{-T}$.

Nápověda

Krok 2:

Dokazované tvrzení má tvar:

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U}$$

Tenzory $\mathbf{U}$ a $\mathbf{V}$ jsme zavedli následovně:

$$\mathbf{U} := \sqrt{\mathbf{C}} = \sqrt{\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}}$$

Nyní zavedeme tenzory

$$\tilde{\mathbf{R}} := \mathbf{V}^{-1} \cdot \mathbf{F}, \quad \mathbf{R} := \mathbf{F} \cdot \mathbf{U}^{-1}$$

a ukážeme, že

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^T = \mathbf{I}, \quad \tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{R}$$

Krok 3:

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^T = (\mathbf{F} \cdot \mathbf{U}^{-1}) \cdot (\mathbf{F} \cdot \mathbf{U}^{-1})^T = \mathbf{F} \cdot (\mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{U}^{-1}) \cdot \mathbf{F}^T = \mathbf{F} \cdot \mathbf{U}^{-2} \cdot \mathbf{F}^T = \mathbf{F} \cdot (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F})^{-1} \cdot \mathbf{F}^T = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{F}^T = \mathbf{I}$$

↑
tenzor je symetrický

a analogicky pro $\tilde{\mathbf{R}}$. $\mathbf{R}$ a $\tilde{\mathbf{R}}$ jsou tedy **ortogonální matice** a platí $\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{V} \cdot \tilde{\mathbf{R}}$.

Nyní ukážeme, že $\tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{R}$:

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{V} \cdot \tilde{\mathbf{R}} = (\tilde{\mathbf{R}} \cdot \tilde{\mathbf{R}}^T) \cdot \mathbf{V} \cdot \tilde{\mathbf{R}} = \tilde{\mathbf{R}} \cdot (\tilde{\mathbf{R}}^T \cdot \mathbf{V} \cdot \tilde{\mathbf{R}}) = \tilde{\mathbf{R}} \cdot \tilde{\mathbf{U}} \Rightarrow \mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \tilde{\mathbf{R}} \cdot \tilde{\mathbf{U}}$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} = \mathbf{U}^2 = (\tilde{\mathbf{R}} \cdot \tilde{\mathbf{U}})^T \cdot (\tilde{\mathbf{R}} \cdot \tilde{\mathbf{U}}) = \tilde{\mathbf{U}} \cdot (\tilde{\mathbf{R}}^T \cdot \tilde{\mathbf{R}}) \cdot \tilde{\mathbf{U}} = \tilde{\mathbf{U}}^2 \Rightarrow \tilde{\mathbf{U}} = \mathbf{U} \Rightarrow \tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{R}$$

$$\text{Vlastní čísla a vektory: } \lambda \vec{p} = \mathbf{U} \cdot \vec{p} \Rightarrow \lambda \mathbf{R} \cdot \vec{p} = (\mathbf{R} \cdot \mathbf{U}) \cdot \vec{p} = (\mathbf{V} \cdot \mathbf{R}) \cdot \vec{p} = \mathbf{V} \cdot (\mathbf{R} \cdot \vec{p})$$

... matice $\mathbf{U}$ a $\mathbf{V}$ tedy mají stejná vlastní čísla.

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T$$

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}$$

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \cdot \mathbf{D}) = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) \cdot \mathbf{D}$$

Pro rotační matici platí $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$, $\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^T = \mathbf{I}$.

$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T$ je symetrická matice.

Pro symetrickou matici platí $\mathbf{S}^T = \mathbf{S}$, $\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}^{-T}$.

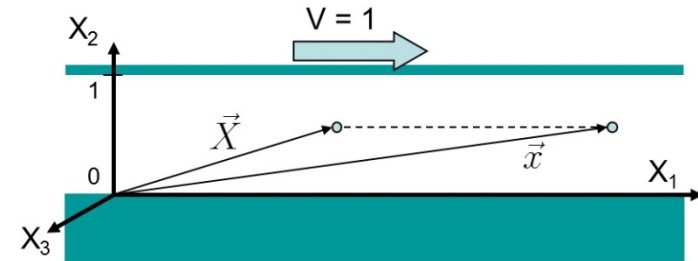
Nápověda

Polární rozklad tenzoru $\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R}$

$$\mathbf{U} = \sqrt{\mathbf{C}} = \sqrt{\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}}$$

$$\mathbf{V} = \sqrt{\mathbf{b}} = \sqrt{\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T}$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{V}^{-1} \cdot \mathbf{F} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{U}^{-1}$$



Polární rozklad tenzoru $\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R}$

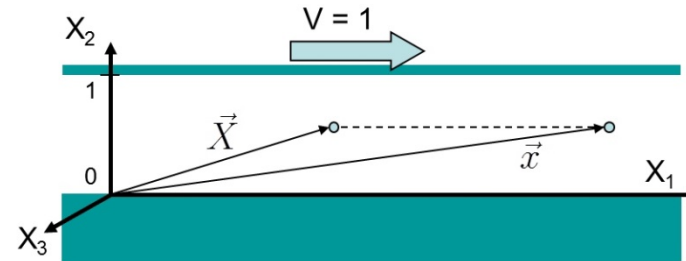
$$\mathbf{U} = \sqrt{\mathbf{C}} = \sqrt{\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}}$$

$$\mathbf{V} = \sqrt{\mathbf{b}} = \sqrt{\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T}$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{V}^{-1} \cdot \mathbf{F} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{U}^{-1}$$

Výpočet vlastních čísel a odmocniny tenzoru $\mathbf{C}$

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ t & t^2 + 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

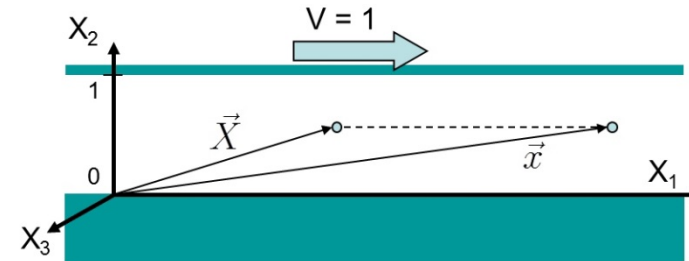


Polární rozklad tenzoru $\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R}$

$$\mathbf{U} = \sqrt{\mathbf{C}} = \sqrt{\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}}$$

$$\mathbf{V} = \sqrt{\mathbf{b}} = \sqrt{\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T}$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{V}^{-1} \cdot \mathbf{F} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{U}^{-1}$$



Výpočet vlastních čísel a odmocniny tenzoru $\mathbf{C}$

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ t & t^2 + 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(\mathbf{C} - \lambda \mathbf{I}) = \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & t & 0 \\ t & t^2 + 1 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

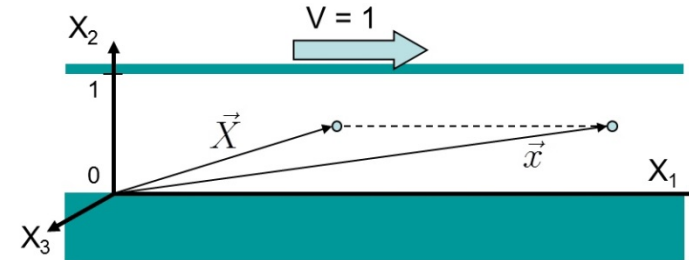
charakteristická matice

Polární rozklad tenzoru $\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R}$

$$\mathbf{U} = \sqrt{\mathbf{C}} = \sqrt{\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}}$$

$$\mathbf{V} = \sqrt{\mathbf{b}} = \sqrt{\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T}$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{V}^{-1} \cdot \mathbf{F} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{U}^{-1}$$



Výpočet vlastních čísel a odmocniny tenzoru $\mathbf{C}$

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ t & t^2 + 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(\mathbf{C} - \lambda \mathbf{I}) = \det \underbrace{\begin{pmatrix} 1 - \lambda & t & 0 \\ t & t^2 + 1 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda \end{pmatrix}}_{\text{charakteristická matice}} = 0$$

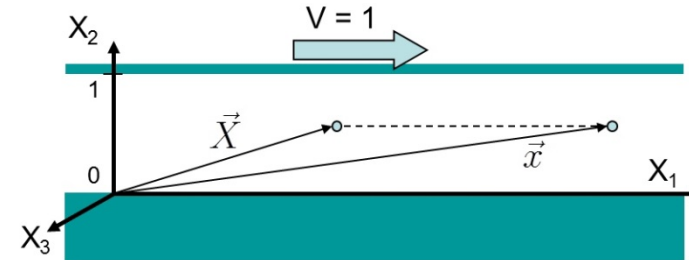
$$(1 - \lambda)(t^2 + 1 - \lambda)(1 - \lambda) - t^2(1 - \lambda) = 0 \quad \text{charakteristický polynom}$$

Polární rozklad tenzoru $\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R}$

$$\mathbf{U} = \sqrt{\mathbf{C}} = \sqrt{\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}}$$

$$\mathbf{V} = \sqrt{\mathbf{b}} = \sqrt{\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T}$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{V}^{-1} \cdot \mathbf{F} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{U}^{-1}$$



Výpočet vlastních čísel a odmocniny tenzoru $\mathbf{C}$

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ t & t^2 + 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(\mathbf{C} - \lambda \mathbf{I}) = \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & t & 0 \\ t & t^2 + 1 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

charakteristická matice

$$(1 - \lambda)(t^2 + 1 - \lambda)(1 - \lambda) - t^2(1 - \lambda) = 0 \quad \text{charakteristický polynom}$$

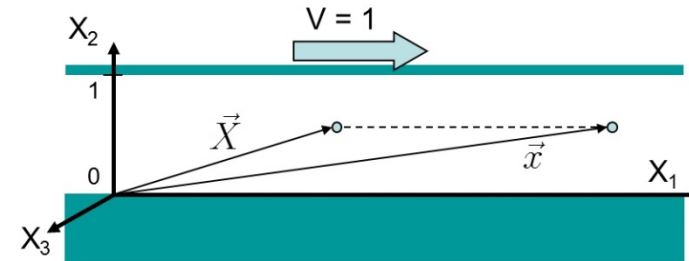
$$(1 - \lambda)[\lambda^2 - \lambda(t^2 + 2) + 1] = 0$$

Polární rozklad tenzoru $\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R}$

$$\mathbf{U} = \sqrt{\mathbf{C}} = \sqrt{\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}}$$

$$\mathbf{V} = \sqrt{\mathbf{b}} = \sqrt{\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T}$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{V}^{-1} \cdot \mathbf{F} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{U}^{-1}$$



Výpočet vlastních čísel a odmocniny tenzoru $\mathbf{C}$

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ t & t^2 + 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(\mathbf{C} - \lambda \mathbf{I}) = \det \underbrace{\begin{pmatrix} 1 - \lambda & t & 0 \\ t & t^2 + 1 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda \end{pmatrix}}_{\text{charakteristická matice}} = 0$$

$$(1 - \lambda)(t^2 + 1 - \lambda)(1 - \lambda) - t^2(1 - \lambda) = 0 \quad \text{charakteristický polynom}$$

$$(1 - \lambda)[\lambda^2 - \lambda(t^2 + 2) + 1] = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{t^2 + 2 \pm \sqrt{(t^2 + 2)^2 - 4}}{2}, \quad \lambda_3 = 1 \quad \longrightarrow \quad \text{všechna vlastní čísla jsou kladná}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{t^2 + 2 \pm \sqrt{(t^2 + 2)^2 - 4}}{2}, \quad \lambda_3 = 1$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{t^2 + 2 \pm \sqrt{(t^2 + 2)^2 - 4}}{2}, \quad \lambda_3 = 1$$

Určení vlastních vektorů

$$(\mathbf{C} - \lambda_i \mathbf{I}) \cdot \vec{p}_i = \begin{pmatrix} 1 - \lambda_i & t & 0 \\ t & t^2 + 1 - \lambda_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda_i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_{i1} \\ p_{i2} \\ p_{i3} \end{pmatrix} = 0, \quad i = 1, 2, 3$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{t^2 + 2 \pm \sqrt{(t^2 + 2)^2 - 4}}{2}, \quad \lambda_3 = 1$$

Určení vlastních vektorů

$$(\mathbf{C} - \lambda_i \mathbf{I}) \cdot \vec{p}_i = \begin{pmatrix} 1 - \lambda_i & t & 0 \\ t & t^2 + 1 - \lambda_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda_i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_{i1} \\ p_{i2} \\ p_{i3} \end{pmatrix} = 0, \quad i = 1, 2, 3$$

Ukážeme pouze pro λ_1 :

$$\begin{aligned} (1 - \lambda_1)p_{11} + tp_{12} &= 0 \\ tp_{11} + (t^2 + 1 - \lambda_1)p_{12} &= 0 \\ (1 - \lambda_1)p_{13} &= 0 \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \text{určíme } \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{12} \\ p_{13} \end{pmatrix}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{t^2 + 2 \pm \sqrt{(t^2 + 2)^2 - 4}}{2}, \quad \lambda_3 = 1$$

Určení vlastních vektorů

$$(\mathbf{C} - \lambda_i \mathbf{I}) \cdot \vec{p}_i = \begin{pmatrix} 1 - \lambda_i & t & 0 \\ t & t^2 + 1 - \lambda_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda_i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_{i1} \\ p_{i2} \\ p_{i3} \end{pmatrix} = 0, \quad i = 1, 2, 3$$

Ukážeme pouze pro λ_1 :

$$\begin{aligned} (1 - \lambda_1)p_{11} + tp_{12} &= 0 \\ tp_{11} + (t^2 + 1 - \lambda_1)p_{12} &= 0 \\ (1 - \lambda_1)p_{13} &= 0 \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \text{určíme } \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{12} \\ p_{13} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{21} & p_{31} \\ p_{12} & p_{22} & p_{32} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} \quad \text{Jordanův rozklad}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{t^2 + 2 \pm \sqrt{(t^2 + 2)^2 - 4}}{2}, \quad \lambda_3 = 1$$

Určení vlastních vektorů

$$(\mathbf{C} - \lambda_i \mathbf{I}) \cdot \vec{p}_i = \begin{pmatrix} 1 - \lambda_i & t & 0 \\ t & t^2 + 1 - \lambda_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda_i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_{i1} \\ p_{i2} \\ p_{i3} \end{pmatrix} = 0, \quad i = 1, 2, 3$$

Ukážeme pouze pro λ_1 :

$$\begin{aligned} (1 - \lambda_1)p_{11} + tp_{12} &= 0 \\ tp_{11} + (t^2 + 1 - \lambda_1)p_{12} &= 0 \\ (1 - \lambda_1)p_{13} &= 0 \end{aligned} \longrightarrow \text{určíme } \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{12} \\ p_{13} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{21} & p_{31} \\ p_{12} & p_{22} & p_{32} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} \quad \text{Jordanův rozklad}$$

$$\mathbf{U} = \sqrt{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{21} & p_{31} \\ p_{12} & p_{22} & p_{32} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\lambda_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{t^2 + 2 \pm \sqrt{(t^2 + 2)^2 - 4}}{2}, \quad \lambda_3 = 1$$

Určení vlastních vektorů

$$(\mathbf{C} - \lambda_i \mathbf{I}) \cdot \vec{p}_i = \begin{pmatrix} 1 - \lambda_i & t & 0 \\ t & t^2 + 1 - \lambda_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda_i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_{i1} \\ p_{i2} \\ p_{i3} \end{pmatrix} = 0, \quad i = 1, 2, 3$$

Ukážeme pouze pro λ_1 :

$$\begin{aligned} (1 - \lambda_1)p_{11} + tp_{12} &= 0 \\ tp_{11} + (t^2 + 1 - \lambda_1)p_{12} &= 0 \\ (1 - \lambda_1)p_{13} &= 0 \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \text{určíme } \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{12} \\ p_{13} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{21} & p_{31} \\ p_{12} & p_{22} & p_{32} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} \quad \text{Jordanův rozklad}$$

$$\mathbf{U} = \sqrt{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{21} & p_{31} \\ p_{12} & p_{22} & p_{32} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\lambda_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}$$

$\mathbf{V}$ a $\mathbf{R}$ pak určíme přímo z polárního rozkladu $\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R}$:

$$\mathbf{R} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{U}^{-1}, \quad \mathbf{V} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{R}^T$$

$$ds^2 = d\vec{x} \cdot d\vec{x} = (\mathbf{F} \cdot d\vec{X}) \cdot (\mathbf{F} \cdot d\vec{X}) = d\vec{X} \cdot \mathbf{C} \cdot d\vec{X} = \mathbf{C} : (d\vec{X} \otimes d\vec{X})$$

Popis deformace

$$(d\vec{X} \cdot \mathbf{F}^T) \cdot (\mathbf{F} \cdot d\vec{X}) = d\vec{X} \cdot (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}) \cdot d\vec{X} \quad \vec{a} \cdot \mathbf{A} \cdot \vec{b} = \mathbf{A} : (\vec{b} \otimes \vec{a})$$

$$ds^2 = d\vec{x} \cdot d\vec{x} = (\mathbf{F} \cdot d\vec{X}) \cdot (\mathbf{F} \cdot d\vec{X}) \stackrel{\downarrow}{=} d\vec{X} \cdot \mathbf{C} \cdot d\vec{X} \stackrel{\downarrow}{=} \mathbf{C} : (d\vec{X} \otimes d\vec{X})$$

Popis deformace

$$(d\vec{X} \cdot \mathbf{F}^T) \cdot (\mathbf{F} \cdot d\vec{X}) = d\vec{X} \cdot (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}) \cdot d\vec{X} \quad \vec{a} \cdot \mathbf{A} \cdot \vec{b} = \mathbf{A} : (\vec{b} \otimes \vec{a})$$

$$ds^2 = d\vec{x} \cdot d\vec{x} = (\mathbf{F} \cdot d\vec{X}) \cdot (\mathbf{F} \cdot d\vec{X}) \stackrel{\downarrow}{=} d\vec{X} \cdot \mathbf{C} \cdot d\vec{X} \stackrel{\downarrow}{=} \mathbf{C} : (d\vec{X} \otimes d\vec{X})$$

$$\mathbf{C}(\vec{X}, t) := \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} = \mathbf{U}^2$$

$$\mathbf{C}_{IJ} = F_{kI} F_{kJ} = \chi_{k,I} \chi_{k,J} = \frac{\partial x_k}{\partial X_I} \frac{\partial x_k}{\partial X_J}$$

Greenův deformační tenzor
right Cauchy-Green deformation tensor
nebo Green's deformation tensor

$$\mathbf{B}(\vec{X}, t) := \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{F}^{-T} = \mathbf{C}^{-1}$$

$$\mathbf{B}_{IJ} = \frac{\partial X_I}{\partial x_k} \frac{\partial X_J}{\partial x_k}$$

Piolův deformační tenzor

Piola (nebo Finger) tensor
(terminologie není ustálená)

$$\mathbf{b}(\vec{x}, t) := \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T = \mathbf{V}^2$$

$$\mathbf{b}_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_K} \frac{\partial x_j}{\partial X_K}$$

Fingerův deformační tenzor

left Cauchy-Green deformation tensor
nebo Finger deformation tensor
(terminologie není ustálená)

$$\mathbf{c}(\vec{x}, t) := \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{b}^{-1}$$

$$\mathbf{c}_{ij} = \frac{\partial X_K}{\partial x_i} \frac{\partial X_K}{\partial x_j}$$

Cauchyho deformační tenzor

Cauchy deformation tensor
někdy také Piola nebo Finger tensor

Popis deformace

$$(d\vec{X} \cdot \mathbf{F}^T) \cdot (\mathbf{F} \cdot d\vec{X}) = d\vec{X} \cdot (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}) \cdot d\vec{X} \quad \vec{a} \cdot \mathbf{A} \cdot \vec{b} = \mathbf{A} : (\vec{b} \otimes \vec{a})$$

$$ds^2 = d\vec{x} \cdot d\vec{x} = (\mathbf{F} \cdot d\vec{X}) \cdot (\mathbf{F} \cdot d\vec{X}) \stackrel{\downarrow}{=} d\vec{X} \cdot \mathbf{C} \cdot d\vec{X} \stackrel{\downarrow}{=} \mathbf{C} : (d\vec{X} \otimes d\vec{X})$$

$$\mathbf{C}(\vec{X}, t) := \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} = \mathbf{U}^2$$

$$\mathbf{C}_{IJ} = F_{kI} F_{kJ} = \chi_{k,I} \chi_{k,J} = \frac{\partial x_k}{\partial X_I} \frac{\partial x_k}{\partial X_J}$$

Greenův deformační tenzor
right Cauchy-Green deformation tensor
nebo Green's deformation tensor

$$\mathbf{B}(\vec{X}, t) := \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{F}^{-T} = \mathbf{C}^{-1}$$

$$\mathbf{B}_{IJ} = \frac{\partial X_I}{\partial x_k} \frac{\partial X_J}{\partial x_k}$$

Piolův deformační tenzor

Piola (nebo Finger) tensor
(terminologie není ustálená)

$$\mathbf{b}(\vec{x}, t) := \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T = \mathbf{V}^2$$

$$\mathbf{b}_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_K} \frac{\partial x_j}{\partial X_K}$$

Fingerův deformační tenzor

left Cauchy-Green deformation tensor
nebo Finger deformation tensor
(terminologie není ustálená)

$$\mathbf{c}(\vec{x}, t) := \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{b}^{-1}$$

$$\mathbf{c}_{ij} = \frac{\partial X_K}{\partial x_i} \frac{\partial X_K}{\partial x_j}$$

Cauchyho deformační tenzor

Cauchy deformation tensor
někdy také Piola nebo Finger tensor

$$dS^2 = d\vec{X} \cdot d\vec{X} = (\mathbf{F}^{-1} \cdot d\vec{x}) \cdot (\mathbf{F}^{-1} \cdot d\vec{x}) = d\vec{x} \cdot \mathbf{c} \cdot d\vec{x} = \mathbf{c} : (d\vec{x} \otimes d\vec{x})$$

Tensor deformace

Tensor deformace

$$ds^2 = d\vec{x} \cdot d\vec{x} = (\mathbf{F} \cdot d\vec{X}) \cdot (\mathbf{F} \cdot d\vec{X}) = d\vec{X} \cdot \mathbf{C} \cdot d\vec{X} = \mathbf{C} : (d\vec{X} \otimes d\vec{X})$$

$$dS^2 = d\vec{X} \cdot d\vec{X} = (\mathbf{F}^{-1} \cdot d\vec{x}) \cdot (\mathbf{F}^{-1} \cdot d\vec{x}) = d\vec{x} \cdot \mathbf{c} \cdot d\vec{x} = \mathbf{c} : (d\vec{x} \otimes d\vec{x})$$

Tenzor deformace

$$ds^2 = d\vec{x} \cdot d\vec{x} = (\mathbf{F} \cdot d\vec{X}) \cdot (\mathbf{F} \cdot d\vec{X}) = d\vec{X} \cdot \mathbf{C} \cdot d\vec{X} = \mathbf{C} : (d\vec{X} \otimes d\vec{X})$$

$$dS^2 = d\vec{X} \cdot d\vec{X} = (\mathbf{F}^{-1} \cdot d\vec{x}) \cdot (\mathbf{F}^{-1} \cdot d\vec{x}) = d\vec{x} \cdot \mathbf{c} \cdot d\vec{x} = \mathbf{c} : (d\vec{x} \otimes d\vec{x})$$

$$\mathbf{C}(\vec{X}, t) := \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}$$

Greenův deformační tenzor

$$\mathbf{c}(\vec{x}, t) := \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{F}^{-1}$$

Cauchyho deformační tenzor

← symetrické tenzory,
na rozdíl od $\mathbf{F}$ pouze
6 nezávislých složek

Tenzor deformace

$$ds^2 = d\vec{x} \cdot d\vec{x} = (\mathbf{F} \cdot d\vec{X}) \cdot (\mathbf{F} \cdot d\vec{X}) = d\vec{X} \cdot \mathbf{C} \cdot d\vec{X} = \mathbf{C} : (d\vec{X} \otimes d\vec{X})$$

$$dS^2 = d\vec{X} \cdot d\vec{X} = (\mathbf{F}^{-1} \cdot d\vec{x}) \cdot (\mathbf{F}^{-1} \cdot d\vec{x}) = d\vec{x} \cdot \mathbf{c} \cdot d\vec{x} = \mathbf{c} : (d\vec{x} \otimes d\vec{x})$$

$$\mathbf{C}(\vec{X}, t) := \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}$$

Greenův deformační tenzor

$$\mathbf{c}(\vec{x}, t) := \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{F}^{-1}$$

Cauchyho deformační tenzor

← symetrické tenzory,
na rozdíl od $\mathbf{F}$ pouze
6 nezávislých složek

Rozdíl čtverců: $ds^2 - dS^2 = d\vec{X} \cdot (\mathbf{C} - \mathbf{I}) \cdot d\vec{X} = d\vec{x} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{c}) \cdot d\vec{x}$

$$\mathbf{E}(\vec{X}, t) := \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) \quad \text{lagrangeovský tenzor deformace (Lagrangian strain tensor)}$$

$$\mathbf{e}(\vec{x}, t) := \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{c}) \quad \text{eulerovský tenzor deformace (Eulerian strain tensor)}$$

$$ds^2 - dS^2 = d\vec{X} \cdot 2\mathbf{E} \cdot d\vec{X} = d\vec{x} \cdot 2\mathbf{e} \cdot d\vec{x}$$

Tenzor deformace

$$ds^2 = d\vec{x} \cdot d\vec{x} = (\mathbf{F} \cdot d\vec{X}) \cdot (\mathbf{F} \cdot d\vec{X}) = d\vec{X} \cdot \mathbf{C} \cdot d\vec{X} = \mathbf{C} : (d\vec{X} \otimes d\vec{X})$$

$$dS^2 = d\vec{X} \cdot d\vec{X} = (\mathbf{F}^{-1} \cdot d\vec{x}) \cdot (\mathbf{F}^{-1} \cdot d\vec{x}) = d\vec{x} \cdot \mathbf{c} \cdot d\vec{x} = \mathbf{c} : (d\vec{x} \otimes d\vec{x})$$

$$\mathbf{C}(\vec{X}, t) := \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}$$

Greenův deformační tenzor

$$\mathbf{c}(\vec{x}, t) := \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{F}^{-1}$$

Cauchyho deformační tenzor

← symetrické tenzory,
na rozdíl od $\mathbf{F}$ pouze
6 nezávislých složek

Rozdíl čtverců: $ds^2 - dS^2 = d\vec{X} \cdot (\mathbf{C} - \mathbf{I}) \cdot d\vec{X} = d\vec{x} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{c}) \cdot d\vec{x}$

$$\mathbf{E}(\vec{X}, t) := \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) \quad \text{lagrangeovský tenzor deformace (Lagrangian strain tensor)}$$

$$\mathbf{e}(\vec{x}, t) := \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{c}) \quad \text{eulerovský tenzor deformace (Eulerian strain tensor)}$$

$$ds^2 - dS^2 = d\vec{X} \cdot 2\mathbf{E} \cdot d\vec{X} = d\vec{x} \cdot 2\mathbf{e} \cdot d\vec{x}$$

Poznámka:

George Green (1793 – 1841, Anglie, matematický fyzik)

Gabrio Piola (1794 – 1850, Itálie, matematický fyzik)

Josef Finger (1841 v Plzni-1925, vystudoval matematiku a fyziku na UK, později rektor Technische Hochschule ve Vídni)

Diagonální složky tenzoru deformace – změny délky

12

Diagonální složky tenzoru deformace – změny délky

Tenzory $\mathbf{E}$ a $\mathbf{e}$ jsou symetrické a mají tedy 6 nezávislých složek:

$$\begin{array}{ll} E_{11}, E_{22}, E_{33} & \text{normálová deformace (normal strain)} \\ E_{12} = E_{21}, E_{13} = E_{31}, E_{23} = E_{32} & \text{smyková deformace (shear strain)} \end{array}$$

Diagonální složky tenzoru deformace – změny délky

Tenzory $\mathbf{E}$ a $\mathbf{e}$ jsou symetrické a mají tedy 6 nezávislých složek:

$$\begin{array}{ll} E_{11}, E_{22}, E_{33} & \text{normálová deformace (normal strain)} \\ E_{12} = E_{21}, E_{13} = E_{31}, E_{23} = E_{32} & \text{smyková deformace (shear strain)} \end{array}$$

Zavedme jednotkový vektor ve směru $d\vec{X}$:

$$\vec{K} := \frac{d\vec{X}}{dS}$$

Diagonální složky tenzoru deformace – změny délky

Tenzory $\mathbf{E}$ a $\mathbf{e}$ jsou symetrické a mají tedy 6 nezávislých složek:

$$E_{11}, E_{22}, E_{33} \quad \text{normálová deformace (normal strain)}$$

$$E_{12} = E_{21}, E_{13} = E_{31}, E_{23} = E_{32} \quad \text{smyková deformace (shear strain)}$$

Zavedme jednotkový vektor ve směru $d\vec{X}$:

$$\vec{K} := \frac{d\vec{X}}{dS}$$

Relativní změna délky (*extension, elongation*) ve směru $d\vec{X}$ je pak:

$$E_{(\vec{K})} := \frac{ds - dS}{dS}$$

Diagonální složky tenzoru deformace – změny délky

Tenzory $\mathbf{E}$ a $\mathbf{e}$ jsou symetrické a mají tedy 6 nezávislých složek:

$$E_{11}, E_{22}, E_{33} \quad \text{normálová deformace (normal strain)}$$

$$E_{12} = E_{21}, E_{13} = E_{31}, E_{23} = E_{32} \quad \text{smyková deformace (shear strain)}$$

Zavedme jednotkový vektor ve směru $d\vec{X}$:

$$\vec{K} := \frac{d\vec{X}}{dS}$$

Relativní změna délky (*extension, elongation*) ve směru $d\vec{X}$ je pak:

$$E_{(\vec{K})} := \frac{ds - dS}{dS}$$

Z definice tenzoru $\mathbf{E}$ plyne

$$ds^2 - dS^2 = d\vec{X} \cdot 2\mathbf{E} \cdot d\vec{X} = (\vec{K} \cdot 2\mathbf{E} \cdot \vec{K}) dS^2 \rightarrow \frac{ds^2 - dS^2}{dS^2} = \vec{K} \cdot 2\mathbf{E} \cdot \vec{K}$$

Diagonální složky tenzoru deformace – změny délky

Tenzory $\mathbf{E}$ a $\mathbf{e}$ jsou symetrické a mají tedy 6 nezávislých složek:

$$E_{11}, E_{22}, E_{33} \quad \text{normálová deformace (normal strain)}$$

$$E_{12} = E_{21}, E_{13} = E_{31}, E_{23} = E_{32} \quad \text{smyková deformace (shear strain)}$$

Zavedme jednotkový vektor ve směru $d\vec{X}$:

$$\vec{K} := \frac{d\vec{X}}{dS}$$

Relativní změna délky (*extension, elongation*) ve směru $d\vec{X}$ je pak:

$$E_{(\vec{K})} := \frac{ds - dS}{dS}$$

Z definice tenzoru $\mathbf{E}$ plyne

$$ds^2 - dS^2 = d\vec{X} \cdot 2\mathbf{E} \cdot d\vec{X} = (\vec{K} \cdot 2\mathbf{E} \cdot \vec{K}) dS^2 \rightarrow \underbrace{\frac{ds^2 - dS^2}{dS^2}} = \vec{K} \cdot 2\mathbf{E} \cdot \vec{K}$$

$$\frac{ds^2 - dS^2}{dS^2} = \left(\frac{ds - dS}{dS} \right) \left(\frac{ds + dS}{dS} \right) = \left(\frac{ds - dS}{dS} \right) \left(\frac{ds - dS}{dS} + 2 \right) = E_{(\vec{K})} (E_{(\vec{K})} + 2)$$

Diagonální složky tenzoru deformace – změny délky

Tenzory $\mathbf{E}$ a $\mathbf{e}$ jsou symetrické a mají tedy 6 nezávislých složek:

$$E_{11}, E_{22}, E_{33} \quad \text{normálová deformace (normal strain)}$$

$$E_{12} = E_{21}, E_{13} = E_{31}, E_{23} = E_{32} \quad \text{smyková deformace (shear strain)}$$

Zavedme jednotkový vektor ve směru $d\vec{X}$:

$$\vec{K} := \frac{d\vec{X}}{dS}$$

Relativní změna délky (*extension, elongation*) ve směru $d\vec{X}$ je pak:

$$E_{(\vec{K})} := \frac{ds - dS}{dS}$$

Z definice tenzoru $\mathbf{E}$ plyne

$$ds^2 - dS^2 = d\vec{X} \cdot 2\mathbf{E} \cdot d\vec{X} = (\vec{K} \cdot 2\mathbf{E} \cdot \vec{K}) dS^2 \rightarrow \underbrace{\frac{ds^2 - dS^2}{dS^2}} = \vec{K} \cdot 2\mathbf{E} \cdot \vec{K}$$

$$\frac{ds^2 - dS^2}{dS^2} = \left(\frac{ds - dS}{dS} \right) \left(\frac{ds + dS}{dS} \right) = \left(\frac{ds - dS}{dS} \right) \left(\frac{ds - dS}{dS} + 2 \right) = E_{(\vec{K})} (E_{(\vec{K})} + 2)$$

Máme tedy rovnici $E_{(\vec{K})} (E_{(\vec{K})} + 2) - \vec{K} \cdot 2\mathbf{E} \cdot \vec{K} = 0$

Diagonální složky tenzoru deformace – změny délky

Tenzory $\mathbf{E}$ a $\mathbf{e}$ jsou symetrické a mají tedy 6 nezávislých složek:

$$E_{11}, E_{22}, E_{33} \quad \text{normálová deformace (normal strain)}$$

$$E_{12} = E_{21}, E_{13} = E_{31}, E_{23} = E_{32} \quad \text{smyková deformace (shear strain)}$$

Zavedme jednotkový vektor ve směru $d\vec{X}$:

$$\vec{K} := \frac{d\vec{X}}{dS}$$

Relativní změna délky (*extension, elongation*) ve směru $d\vec{X}$ je pak:

$$E_{(\vec{K})} := \frac{ds - dS}{dS}$$

Z definice tenzoru $\mathbf{E}$ plyne

$$ds^2 - dS^2 = d\vec{X} \cdot 2\mathbf{E} \cdot d\vec{X} = (\vec{K} \cdot 2\mathbf{E} \cdot \vec{K}) dS^2 \rightarrow \underbrace{\frac{ds^2 - dS^2}{dS^2}} = \vec{K} \cdot 2\mathbf{E} \cdot \vec{K}$$

$$\frac{ds^2 - dS^2}{dS^2} = \left(\frac{ds - dS}{dS} \right) \left(\frac{ds + dS}{dS} \right) = \left(\frac{ds - dS}{dS} \right) \left(\frac{ds - dS}{dS} + 2 \right) = E_{(\vec{K})} (E_{(\vec{K})} + 2)$$

Máme tedy rovnici $E_{(\vec{K})} (E_{(\vec{K})} + 2) - \vec{K} \cdot 2\mathbf{E} \cdot \vec{K} = 0$, jejíž fyzikální řešení je

$$E_{(\vec{K})} = -1 + \sqrt{1 + \vec{K} \cdot 2\mathbf{E} \cdot \vec{K}}$$

Diagonální složky tenzoru deformace – změny délky

Tenzory $\mathbf{E}$ a $\mathbf{e}$ jsou symetrické a mají tedy 6 nezávislých složek:

$$E_{11}, E_{22}, E_{33} \quad \text{normálová deformace (normal strain)}$$

$$E_{12} = E_{21}, E_{13} = E_{31}, E_{23} = E_{32} \quad \text{smyková deformace (shear strain)}$$

Zavedme jednotkový vektor ve směru $d\vec{X}$:

$$\vec{K} := \frac{d\vec{X}}{dS}$$

Relativní změna délky (*extension, elongation*) ve směru $d\vec{X}$ je pak:

$$E_{(\vec{K})} := \frac{ds - dS}{dS}$$

Z definice tenzoru $\mathbf{E}$ plyne

$$ds^2 - dS^2 = d\vec{X} \cdot 2\mathbf{E} \cdot d\vec{X} = (\vec{K} \cdot 2\mathbf{E} \cdot \vec{K}) dS^2 \rightarrow \underbrace{\frac{ds^2 - dS^2}{dS^2}} = \vec{K} \cdot 2\mathbf{E} \cdot \vec{K}$$

$$\frac{ds^2 - dS^2}{dS^2} = \left(\frac{ds - dS}{dS} \right) \left(\frac{ds + dS}{dS} \right) = \left(\frac{ds - dS}{dS} \right) \left(\frac{ds - dS}{dS} + 2 \right) = E_{(\vec{K})} (E_{(\vec{K})} + 2)$$

Máme tedy rovnici $E_{(\vec{K})} (E_{(\vec{K})} + 2) - \vec{K} \cdot 2\mathbf{E} \cdot \vec{K} = 0$, jejíž fyzikální řešení je

$$E_{(\vec{K})} = -1 + \sqrt{1 + \vec{K} \cdot 2\mathbf{E} \cdot \vec{K}}$$

kladné číslo: $1 + \vec{K} \cdot 2\mathbf{E} \cdot \vec{K} = 1 + \vec{K} \cdot (\mathbf{C} - \mathbf{I}) \cdot \vec{K} = \vec{K} \cdot \mathbf{C} \cdot \vec{K} > 0$

Diagonální složky tenzoru deformace – změny délky

Tenzory $\mathbf{E}$ a $\mathbf{e}$ jsou symetrické a mají tedy 6 nezávislých složek:

$$E_{11}, E_{22}, E_{33} \quad \text{normálová deformace (normal strain)}$$

$$E_{12} = E_{21}, E_{13} = E_{31}, E_{23} = E_{32} \quad \text{smyková deformace (shear strain)}$$

Zavedme jednotkový vektor ve směru $d\vec{X}$:

$$\vec{K} := \frac{d\vec{X}}{dS}$$

Relativní změna délky (*extension, elongation*) ve směru $d\vec{X}$ je pak:

$$E_{(\vec{K})} := \frac{ds - dS}{dS}$$

Z definice tenzoru $\mathbf{E}$ plyne

$$ds^2 - dS^2 = d\vec{X} \cdot 2\mathbf{E} \cdot d\vec{X} = (\vec{K} \cdot 2\mathbf{E} \cdot \vec{K}) dS^2 \rightarrow \underbrace{\frac{ds^2 - dS^2}{dS^2}} = \vec{K} \cdot 2\mathbf{E} \cdot \vec{K}$$

$$\frac{ds^2 - dS^2}{dS^2} = \left(\frac{ds - dS}{dS} \right) \left(\frac{ds + dS}{dS} \right) = \left(\frac{ds - dS}{dS} \right) \left(\frac{ds - dS}{dS} + 2 \right) = E_{(\vec{K})} (E_{(\vec{K})} + 2)$$

Máme tedy rovnici $E_{(\vec{K})} (E_{(\vec{K})} + 2) - \vec{K} \cdot 2\mathbf{E} \cdot \vec{K} = 0$, jejíž fyzikální řešení je

$$E_{(\vec{K})} = -1 + \sqrt{1 + \vec{K} \cdot 2\mathbf{E} \cdot \vec{K}}$$

$$\text{kladné číslo: } 1 + \vec{K} \cdot 2\mathbf{E} \cdot \vec{K} = 1 + \vec{K} \cdot (\mathbf{C} - \mathbf{I}) \cdot \vec{K} = \vec{K} \cdot \mathbf{C} \cdot \vec{K} > 0$$

Diagonální složky tenzoru deformace – změny délky

Tenzory $\mathbf{E}$ a $\mathbf{e}$ jsou symetrické a mají tedy 6 nezávislých složek:

$$E_{11}, E_{22}, E_{33} \quad \text{normálová deformace (normal strain)}$$

$$E_{12} = E_{21}, E_{13} = E_{31}, E_{23} = E_{32} \quad \text{smyková deformace (shear strain)}$$

Zavedme jednotkový vektor ve směru $d\vec{X}$:

$$\vec{K} := \frac{d\vec{X}}{dS}$$

Relativní změna délky (*extension, elongation*) ve směru $d\vec{X}$ je pak:

$$E_{(\vec{K})} := \frac{ds - dS}{dS}$$

Z definice tenzoru $\mathbf{E}$ plyne

$$ds^2 - dS^2 = d\vec{X} \cdot 2\mathbf{E} \cdot d\vec{X} = (\vec{K} \cdot 2\mathbf{E} \cdot \vec{K}) dS^2 \rightarrow \underbrace{\frac{ds^2 - dS^2}{dS^2}} = \vec{K} \cdot 2\mathbf{E} \cdot \vec{K}$$

$$\frac{ds^2 - dS^2}{dS^2} = \left(\frac{ds - dS}{dS} \right) \left(\frac{ds + dS}{dS} \right) = \left(\frac{ds - dS}{dS} \right) \left(\frac{ds - dS}{dS} + 2 \right) = E_{(\vec{K})}(E_{(\vec{K})} + 2)$$

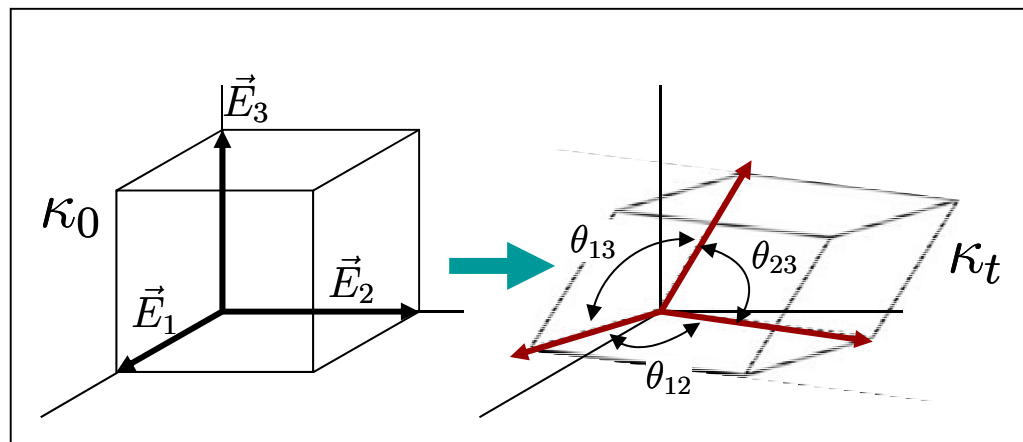
Máme tedy rovnici $E_{(\vec{K})}(E_{(\vec{K})} + 2) - \vec{K} \cdot 2\mathbf{E} \cdot \vec{K} = 0$, jejíž fyzikální řešení je

$$E_{(\vec{K})} = -1 + \sqrt{1 + \underbrace{\vec{K} \cdot 2\mathbf{E} \cdot \vec{K}}}$$

$$\text{kladné číslo: } 1 + \vec{K} \cdot 2\mathbf{E} \cdot \vec{K} = 1 + \vec{K} \cdot (\mathbf{C} - \mathbf{I}) \cdot \vec{K} = \vec{K} \cdot \mathbf{C} \cdot \vec{K} > 0$$

$$E_{(1)} = -1 + \sqrt{1 + 2E_{11}}, \quad E_{(2)} = -1 + \sqrt{1 + 2E_{22}}, \quad E_{(3)} = -1 + \sqrt{1 + 2E_{33}}$$

... a analogicky pro tenzor $\mathbf{e}$

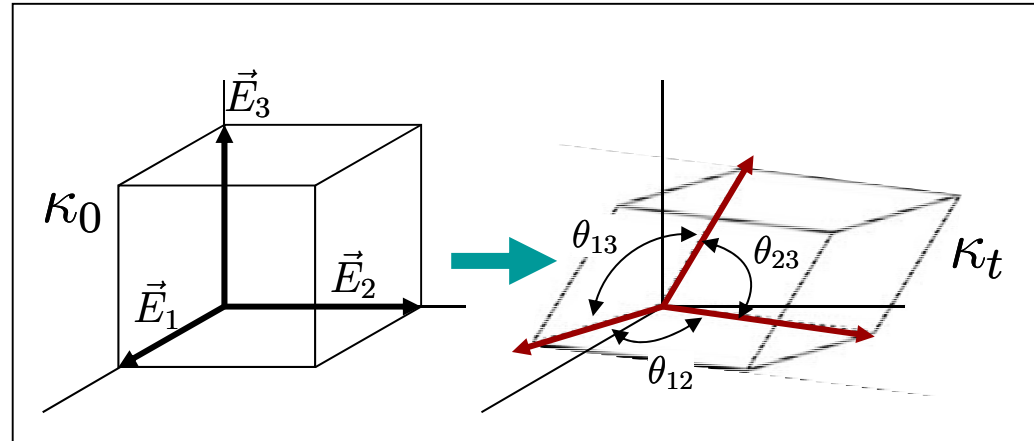


Nediagonální složky tenzoru deformace – změny úhlů

13

Uvažujme dva směry dané vektory

$$\vec{K}^{(1)} := \frac{d\vec{X}^{(1)}}{dS^{(1)}}, \quad \vec{K}^{(2)} := \frac{d\vec{X}^{(2)}}{dS^{(2)}}$$



Nediagonální složky tenzoru deformace – změny úhlů

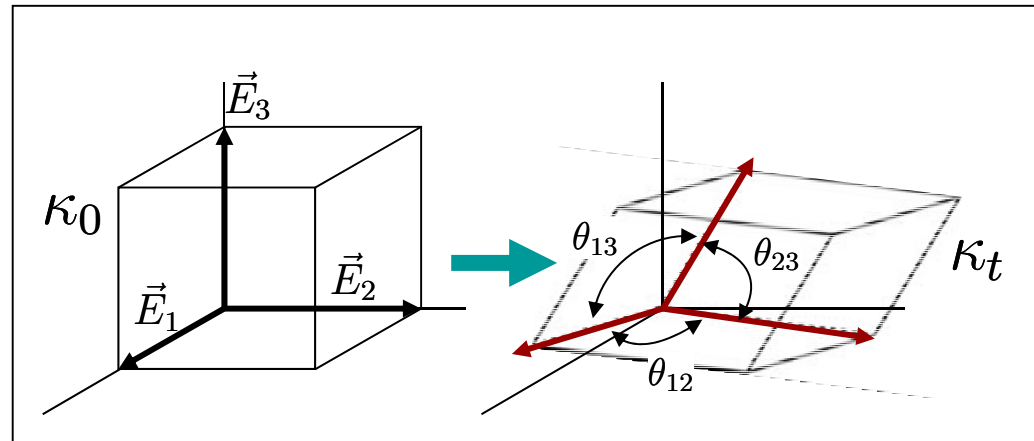
13

Uvažujme dva směry dané vektory

$$\vec{K}^{(1)} := \frac{d\vec{X}^{(1)}}{dS^{(1)}}, \quad \vec{K}^{(2)} := \frac{d\vec{X}^{(2)}}{dS^{(2)}}$$

Úhel mezi těmito dvěma vektory
v konfiguraci κ_0 je

$$\cos \Theta = \frac{d\vec{X}^{(1)}}{dS^{(1)}} \cdot \frac{d\vec{X}^{(2)}}{dS^{(2)}}$$



Nediagonální složky tenzoru deformace – změny úhlů

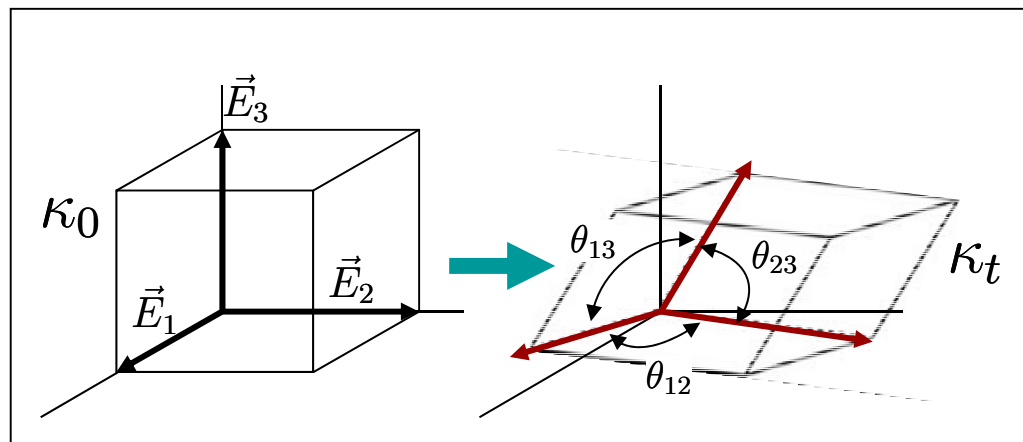
13

Uvažujme dva směry dané vektory

$$\vec{K}^{(1)} := \frac{d\vec{X}^{(1)}}{dS^{(1)}}, \quad \vec{K}^{(2)} := \frac{d\vec{X}^{(2)}}{dS^{(2)}}$$

Úhel mezi těmito dvěma vektory v konfiguraci κ_0 je

$$\cos \Theta = \frac{d\vec{X}^{(1)}}{dS^{(1)}} \cdot \frac{d\vec{X}^{(2)}}{dS^{(2)}}$$



V důsledku deformace je tento úhel změněn na

$$\cos \theta = \frac{d\vec{x}^{(1)}}{ds^{(1)}} \cdot \frac{d\vec{x}^{(2)}}{ds^{(2)}} = \frac{\mathbf{F} \cdot d\vec{X}^{(1)}}{ds^{(1)}} \cdot \frac{\mathbf{F} \cdot d\vec{X}^{(2)}}{ds^{(2)}} = \frac{d\vec{X}^{(1)} \cdot \mathbf{C} \cdot d\vec{X}^{(2)}}{ds^{(1)} ds^{(2)}} = (\vec{K}^{(1)} \cdot \mathbf{C} \cdot \vec{K}^{(2)}) \frac{dS^{(1)}}{ds^{(1)}} \frac{dS^{(2)}}{ds^{(2)}} =$$

Nediagonální složky tenzoru deformace – změny úhlů

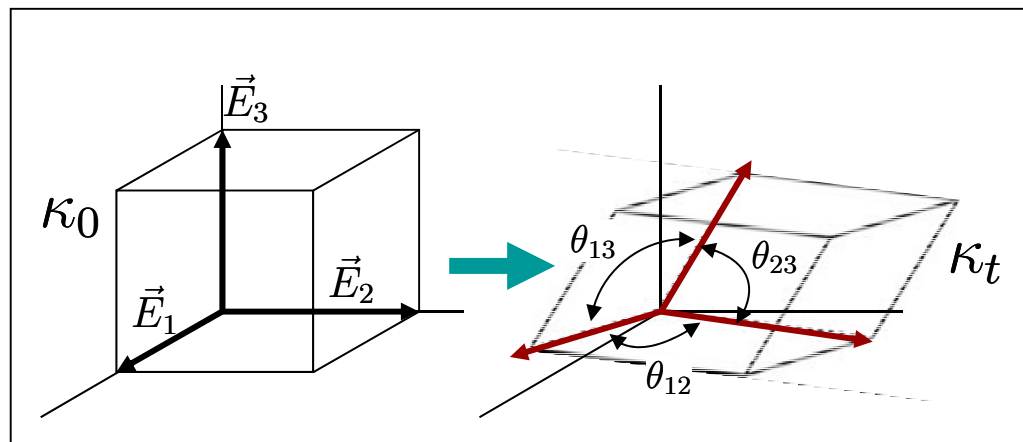
13

Uvažujme dva směry dané vektory

$$\vec{K}^{(1)} := \frac{d\vec{X}^{(1)}}{dS^{(1)}}, \quad \vec{K}^{(2)} := \frac{d\vec{X}^{(2)}}{dS^{(2)}}$$

Úhel mezi těmito dvěma vektory
v konfiguraci κ_0 je

$$\cos \Theta = \frac{d\vec{X}^{(1)}}{dS^{(1)}} \cdot \frac{d\vec{X}^{(2)}}{dS^{(2)}}$$



V důsledku deformace je tento úhel změněn na

$$\cos \theta = \frac{d\vec{x}^{(1)}}{ds^{(1)}} \cdot \frac{d\vec{x}^{(2)}}{ds^{(2)}} = \frac{\mathbf{F} \cdot d\vec{X}^{(1)}}{ds^{(1)}} \cdot \frac{\mathbf{F} \cdot d\vec{X}^{(2)}}{ds^{(2)}} = \frac{d\vec{X}^{(1)} \cdot \mathbf{C} \cdot d\vec{X}^{(2)}}{ds^{(1)} ds^{(2)}} = (\vec{K}^{(1)} \cdot \mathbf{C} \cdot \vec{K}^{(2)}) \frac{dS^{(1)}}{ds^{(1)}} \frac{dS^{(2)}}{ds^{(2)}} \downarrow =$$

$$E_{(\vec{K})} := \frac{ds - dS}{dS} = \frac{ds}{dS} - 1 \rightarrow \frac{ds}{dS} = E_{(\vec{K})} + 1$$

Nediagonální složky tenzoru deformace – změny úhlů

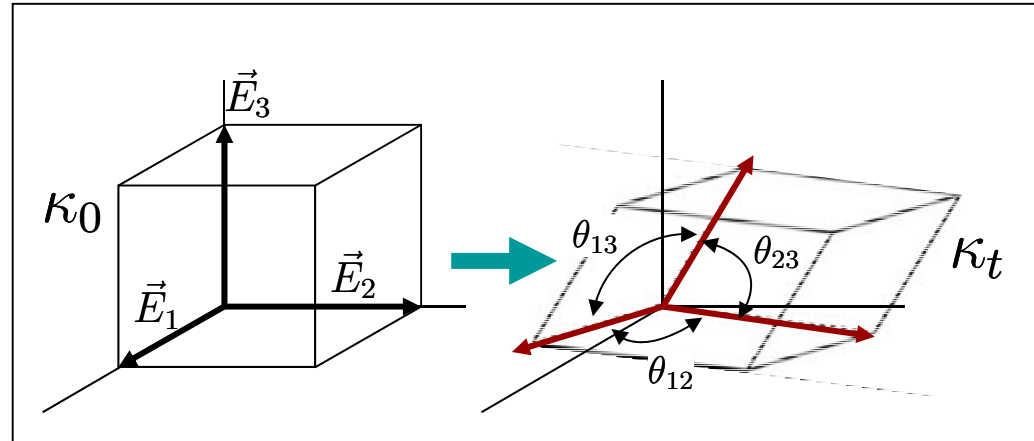
13

Uvažujme dva směry dané vektory

$$\vec{K}^{(1)} := \frac{d\vec{X}^{(1)}}{dS^{(1)}}, \quad \vec{K}^{(2)} := \frac{d\vec{X}^{(2)}}{dS^{(2)}}$$

Úhel mezi těmito dvěma vektory
v konfiguraci κ_0 je

$$\cos \Theta = \frac{d\vec{X}^{(1)}}{dS^{(1)}} \cdot \frac{d\vec{X}^{(2)}}{dS^{(2)}}$$



V důsledku deformace je tento úhel změněn na

$$E_{(\vec{K})} := \frac{ds - dS}{dS} = \frac{ds}{dS} - 1 \rightarrow \frac{ds}{dS} = E_{(\vec{K})} + 1$$

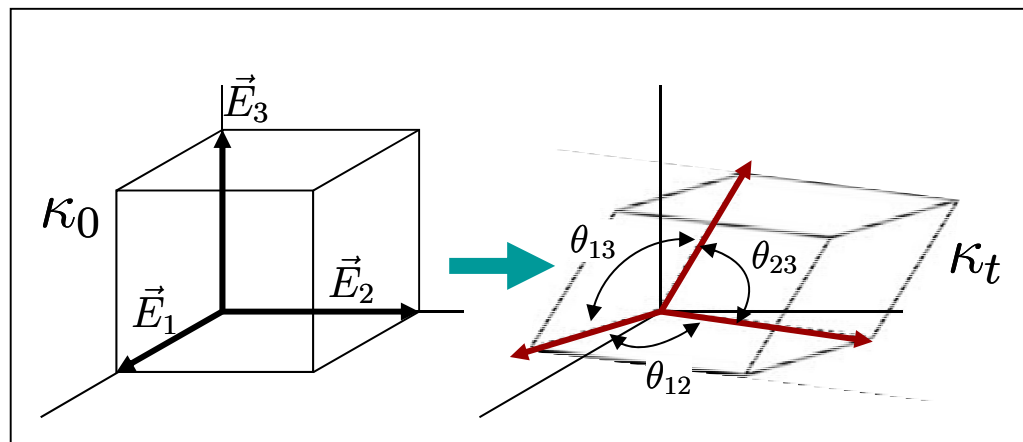
$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{d\vec{x}^{(1)}}{ds^{(1)}} \cdot \frac{d\vec{x}^{(2)}}{ds^{(2)}} = \frac{\mathbf{F} \cdot d\vec{X}^{(1)}}{ds^{(1)}} \cdot \frac{\mathbf{F} \cdot d\vec{X}^{(2)}}{ds^{(2)}} = \frac{d\vec{X}^{(1)} \cdot \mathbf{C} \cdot d\vec{X}^{(2)}}{ds^{(1)} ds^{(2)}} = (\vec{K}^{(1)} \cdot \mathbf{C} \cdot \vec{K}^{(2)}) \frac{dS^{(1)}}{ds^{(1)}} \frac{dS^{(2)}}{ds^{(2)}} \downarrow \\ &= \frac{\vec{K}^{(1)} \cdot \mathbf{C} \cdot \vec{K}^{(2)}}{(E_{(\vec{K}_1)} + 1)(E_{(\vec{K}_2)} + 1)} = \frac{\vec{K}^{(1)} \cdot (\mathbf{I} + 2\mathbf{E}) \cdot \vec{K}^{(2)}}{\sqrt{1 + \vec{K}^{(1)} \cdot 2\mathbf{E} \cdot \vec{K}^{(1)}} \sqrt{1 + \vec{K}^{(2)} \cdot 2\mathbf{E} \cdot \vec{K}^{(2)}}} \end{aligned}$$

Uvažujme dva směry dané vektory

$$\vec{K}^{(1)} := \frac{d\vec{X}^{(1)}}{dS^{(1)}}, \quad \vec{K}^{(2)} := \frac{d\vec{X}^{(2)}}{dS^{(2)}}$$

Úhel mezi těmito dvěma vektory v konfiguraci κ_0 je

$$\cos \Theta = \frac{d\vec{X}^{(1)}}{dS^{(1)}} \cdot \frac{d\vec{X}^{(2)}}{dS^{(2)}}$$



V důsledku deformace je tento úhel změněn na

$$E_{(\vec{K})} := \frac{ds - dS}{dS} = \frac{ds}{dS} - 1 \rightarrow \frac{ds}{dS} = E_{(\vec{K})} + 1$$

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{d\vec{x}^{(1)}}{ds^{(1)}} \cdot \frac{d\vec{x}^{(2)}}{ds^{(2)}} = \frac{\mathbf{F} \cdot d\vec{X}^{(1)}}{ds^{(1)}} \cdot \frac{\mathbf{F} \cdot d\vec{X}^{(2)}}{ds^{(2)}} = \frac{d\vec{X}^{(1)} \cdot \mathbf{C} \cdot d\vec{X}^{(2)}}{ds^{(1)} ds^{(2)}} = (\vec{K}^{(1)} \cdot \mathbf{C} \cdot \vec{K}^{(2)}) \frac{dS^{(1)}}{ds^{(1)}} \frac{dS^{(2)}}{ds^{(2)}} \downarrow \\ &= \frac{\vec{K}^{(1)} \cdot \mathbf{C} \cdot \vec{K}^{(2)}}{(E_{(\vec{K}_1)} + 1)(E_{(\vec{K}_2)} + 1)} = \frac{\vec{K}^{(1)} \cdot (\mathbf{I} + 2\mathbf{E}) \cdot \vec{K}^{(2)}}{\sqrt{1 + \vec{K}^{(1)} \cdot 2\mathbf{E} \cdot \vec{K}^{(1)}} \sqrt{1 + \vec{K}^{(2)} \cdot 2\mathbf{E} \cdot \vec{K}^{(2)}}} \end{aligned}$$

Zvolíme-li $\vec{K}^{(1)} = \vec{E}_1$, $\vec{K}^{(2)} = \vec{E}_2$, $\vec{K}^{(3)} = \vec{E}_3$,

Nediagonální složky tenzoru deformace – změny úhlů

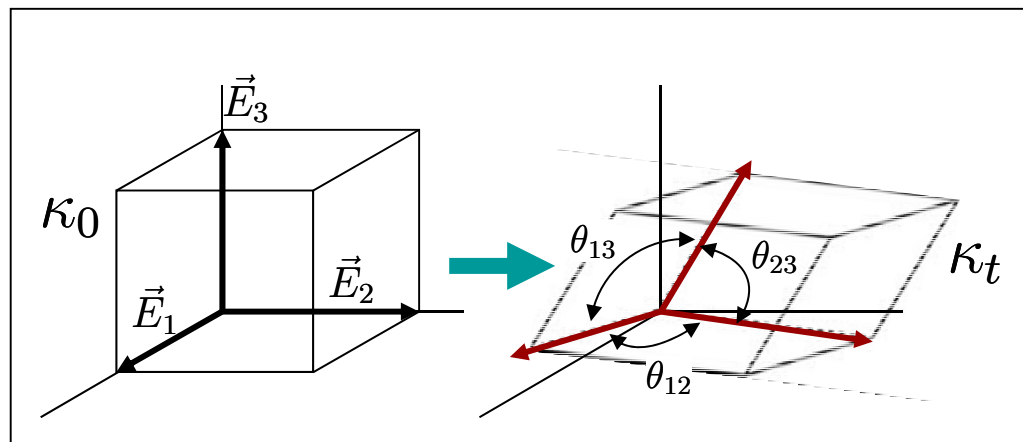
13

Uvažujme dva směry dané vektory

$$\vec{K}^{(1)} := \frac{d\vec{X}^{(1)}}{dS^{(1)}}, \quad \vec{K}^{(2)} := \frac{d\vec{X}^{(2)}}{dS^{(2)}}$$

Úhel mezi těmito dvěma vektory v konfiguraci κ_0 je

$$\cos \Theta = \frac{d\vec{X}^{(1)}}{dS^{(1)}} \cdot \frac{d\vec{X}^{(2)}}{dS^{(2)}}$$



V důsledku deformace je tento úhel změněn na

$$E_{(\vec{K})} := \frac{ds - dS}{dS} = \frac{ds}{dS} - 1 \rightarrow \frac{ds}{dS} = E_{(\vec{K})} + 1$$

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{d\vec{x}^{(1)}}{ds^{(1)}} \cdot \frac{d\vec{x}^{(2)}}{ds^{(2)}} = \frac{\mathbf{F} \cdot d\vec{X}^{(1)}}{ds^{(1)}} \cdot \frac{\mathbf{F} \cdot d\vec{X}^{(2)}}{ds^{(2)}} = \frac{d\vec{X}^{(1)} \cdot \mathbf{C} \cdot d\vec{X}^{(2)}}{ds^{(1)} ds^{(2)}} = (\vec{K}^{(1)} \cdot \mathbf{C} \cdot \vec{K}^{(2)}) \frac{dS^{(1)}}{ds^{(1)}} \frac{dS^{(2)}}{ds^{(2)}} \downarrow \\ &= \frac{\vec{K}^{(1)} \cdot \mathbf{C} \cdot \vec{K}^{(2)}}{(E_{(\vec{K}_1)} + 1)(E_{(\vec{K}_2)} + 1)} = \frac{\vec{K}^{(1)} \cdot (\mathbf{I} + 2\mathbf{E}) \cdot \vec{K}^{(2)}}{\sqrt{1 + \vec{K}^{(1)} \cdot 2\mathbf{E} \cdot \vec{K}^{(1)}} \sqrt{1 + \vec{K}^{(2)} \cdot 2\mathbf{E} \cdot \vec{K}^{(2)}}} \end{aligned}$$

Zvolíme-li $\vec{K}^{(1)} = \vec{E}_1$, $\vec{K}^{(2)} = \vec{E}_2$, $\vec{K}^{(3)} = \vec{E}_3$, pak

$$\cos \theta_{12} = \frac{2E_{12}}{\sqrt{1 + 2E_{11}}\sqrt{1 + 2E_{22}}}, \quad \cos \theta_{13} = \frac{2E_{13}}{\sqrt{1 + 2E_{11}}\sqrt{1 + 2E_{33}}}, \quad \cos \theta_{23} = \frac{2E_{23}}{\sqrt{1 + 2E_{22}}\sqrt{1 + 2E_{33}}}$$

... a analogicky pro tenzor $\mathbf{e}$

Změny plochy

Změny plochy

Obecný orientovaný element plochy před deformací,

$$d\vec{A} = dA \vec{N} := d\vec{X}^{(1)} \times d\vec{X}^{(2)}$$

Změny plochy

Obecný orientovaný element plochy před deformací,

$$d\vec{A} = dA \vec{N} := d\vec{X}^{(1)} \times d\vec{X}^{(2)}$$

se po deformaci změní na

$$d\vec{a} = da \vec{n} := d\vec{x}^{(1)} \times d\vec{x}^{(2)} = (\mathbf{F} \cdot d\vec{X}^{(1)}) \times (\mathbf{F} \cdot d\vec{X}^{(2)})$$

Změny plochy

Obecný orientovaný element plochy před deformací,

$$d\vec{A} = dA \vec{N} := d\vec{X}^{(1)} \times d\vec{X}^{(2)}$$

se po deformaci změní na

$$J\mathbf{F}^{-T} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = (\mathbf{F} \cdot \vec{A}) \times (\mathbf{F} \cdot \vec{B})$$

viz str. 04



$$d\vec{a} = da \vec{n} := d\vec{x}^{(1)} \times d\vec{x}^{(2)} = (\mathbf{F} \cdot d\vec{X}^{(1)}) \times (\mathbf{F} \cdot d\vec{X}^{(2)}) =$$

Změny plochy

Obecný orientovaný element plochy před deformací,

$$d\vec{A} = dA \vec{N} := d\vec{X}^{(1)} \times d\vec{X}^{(2)}$$

se po deformaci změní na

$$J\mathbf{F}^{-T} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = (\mathbf{F} \cdot \vec{A}) \times (\mathbf{F} \cdot \vec{B}) \quad \text{viz str. 04}$$



$$d\vec{a} = da \vec{n} := d\vec{x}^{(1)} \times d\vec{x}^{(2)} = (\mathbf{F} \cdot d\vec{X}^{(1)}) \times (\mathbf{F} \cdot d\vec{X}^{(2)}) = J\mathbf{F}^{-T} \cdot (d\vec{X}^{(1)} \times d\vec{X}^{(2)}) = J\mathbf{F}^{-T} \cdot d\vec{A}$$

Změny plochy

Obecný orientovaný element plochy před deformací,

$$d\vec{A} = dA \vec{N} := d\vec{X}^{(1)} \times d\vec{X}^{(2)}$$

se po deformaci změzí na

$$J\mathbf{F}^{-T} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = (\mathbf{F} \cdot \vec{A}) \times (\mathbf{F} \cdot \vec{B}) \quad \text{viz str. 04}$$



$$d\vec{a} = da \vec{n} := d\vec{x}^{(1)} \times d\vec{x}^{(2)} = (\mathbf{F} \cdot d\vec{X}^{(1)}) \times (\mathbf{F} \cdot d\vec{X}^{(2)}) = J\mathbf{F}^{-T} \cdot (d\vec{X}^{(1)} \times d\vec{X}^{(2)}) = J\mathbf{F}^{-T} \cdot d\vec{A}$$

a tedy

$$d\vec{a} = J\mathbf{F}^{-T} \cdot d\vec{A}$$

Změny plochy

Obecný orientovaný element plochy před deformací,

$$d\vec{A} = dA \vec{N} := d\vec{X}^{(1)} \times d\vec{X}^{(2)}$$

se po deformaci změní na

$$J\mathbf{F}^{-T} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = (\mathbf{F} \cdot \vec{A}) \times (\mathbf{F} \cdot \vec{B}) \quad \text{viz str. 04}$$



$$d\vec{a} = da \vec{n} := d\vec{x}^{(1)} \times d\vec{x}^{(2)} = (\mathbf{F} \cdot d\vec{X}^{(1)}) \times (\mathbf{F} \cdot d\vec{X}^{(2)}) = J\mathbf{F}^{-T} \cdot (d\vec{X}^{(1)} \times d\vec{X}^{(2)}) = J\mathbf{F}^{-T} \cdot d\vec{A}$$

a tedy

$$d\vec{a} = J\mathbf{F}^{-T} \cdot d\vec{A}$$

Odvoďme nyní vztah mezi skaláry da a dA :

Piolaův tenzor $\mathbf{B}$, str. 10



$$(da)^2 = d\vec{a} \cdot d\vec{a} = (J\mathbf{F}^{-T} \cdot d\vec{A}) \cdot (J\mathbf{F}^{-T} \cdot d\vec{A}) = J^2(dA)^2 \vec{N} \cdot (\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{F}^{-T}) \cdot \vec{N}$$



odkud

$$J^2(dA)^2 (\mathbf{F}^{-T} \cdot \vec{N}) \cdot (\mathbf{F}^{-T} \cdot \vec{N}) = J^2(dA)^2 (\vec{N} \cdot \mathbf{F}^{-1}) \cdot (\mathbf{F}^{-T} \cdot \vec{N})$$

$$da = J \sqrt{\vec{N} \cdot \mathbf{B} \cdot \vec{N}} dA$$

Změny plochy

Obecný orientovaný element plochy před deformací,

$$d\vec{A} = dA \vec{N} := d\vec{X}^{(1)} \times d\vec{X}^{(2)}$$

se po deformaci změni na

$$J\mathbf{F}^{-T} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = (\mathbf{F} \cdot \vec{A}) \times (\mathbf{F} \cdot \vec{B}) \quad \text{viz str. 04}$$



$$d\vec{a} = da \vec{n} := d\vec{x}^{(1)} \times d\vec{x}^{(2)} = (\mathbf{F} \cdot d\vec{X}^{(1)}) \times (\mathbf{F} \cdot d\vec{X}^{(2)}) = J\mathbf{F}^{-T} \cdot (d\vec{X}^{(1)} \times d\vec{X}^{(2)}) = J\mathbf{F}^{-T} \cdot d\vec{A}$$

a tedy

$$d\vec{a} = J\mathbf{F}^{-T} \cdot d\vec{A}$$

Odvoďme nyní vztah mezi skaláry da a dA :

Piolův tenzor $\mathbf{B}$, str. 10



$$(da)^2 = d\vec{a} \cdot d\vec{a} = (J\mathbf{F}^{-T} \cdot d\vec{A}) \cdot (J\mathbf{F}^{-T} \cdot d\vec{A}) = J^2(dA)^2 \vec{N} \cdot (\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{F}^{-T}) \cdot \vec{N}$$



odkud

$$J^2(dA)^2(\mathbf{F}^{-T} \cdot \vec{N}) \cdot (\mathbf{F}^{-T} \cdot \vec{N}) = J^2(dA)^2(\vec{N} \cdot \mathbf{F}^{-1}) \cdot (\mathbf{F}^{-T} \cdot \vec{N})$$

$$da = J\sqrt{\vec{N} \cdot \mathbf{B} \cdot \vec{N}} dA$$

Dosazením tohoto vztahu do vztahu pro $d\vec{a}$ získáme relaci mezi vektory $\vec{n}$ a $\vec{N}$:

$$d\vec{a} = da \vec{n} = \left(J\sqrt{\vec{N} \cdot \mathbf{B} \cdot \vec{N}} dA \right) \vec{n} = J\mathbf{F}^{-T} \cdot d\vec{A} = J\mathbf{F}^{-T} \cdot (dA \vec{N}) = J(\vec{N} \cdot \mathbf{F}^{-1})dA$$

$$\vec{n} = \frac{\vec{N} \cdot \mathbf{F}^{-1}}{\sqrt{\vec{N} \cdot \mathbf{B} \cdot \vec{N}}}$$

Změny objemu

Srovnáme objem infinitesimálního rovnoběžnostěnu před deformací,

$$dV := (d\vec{X}^{(1)} \times d\vec{X}^{(2)}) \cdot d\vec{X}^{(3)},$$

a po deformaci,

$$dv := (d\vec{x}^{(1)} \times d\vec{x}^{(2)}) \cdot d\vec{x}^{(3)} = [(\mathbf{F} \cdot d\vec{X}^{(1)}) \times (\mathbf{F} \cdot d\vec{X}^{(2)})] \cdot (\mathbf{F} \cdot d\vec{X}^{(3)}).$$

Změny objemu

Srovnáme objem infinitesimálního rovnoběžnostěnu před deformací,

$$dV := (d\vec{X}^{(1)} \times d\vec{X}^{(2)}) \cdot d\vec{X}^{(3)},$$

a po deformaci,

$$dv := (d\vec{x}^{(1)} \times d\vec{x}^{(2)}) \cdot d\vec{x}^{(3)} = [(\mathbf{F} \cdot d\vec{X}^{(1)}) \times (\mathbf{F} \cdot d\vec{X}^{(2)})] \cdot (\mathbf{F} \cdot d\vec{X}^{(3)}).$$

Použitím identity ze str. 04,

$$J(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} = [(\mathbf{F} \cdot \vec{A}) \times (\mathbf{F} \cdot \vec{B})] \cdot (\mathbf{F} \cdot \vec{C})$$

Změny objemu

Srovnáme objem infinitesimálního rovnoběžnostěnu před deformací,

$$dV := (d\vec{X}^{(1)} \times d\vec{X}^{(2)}) \cdot d\vec{X}^{(3)},$$

a po deformaci,

$$dv := (d\vec{x}^{(1)} \times d\vec{x}^{(2)}) \cdot d\vec{x}^{(3)} = [(\mathbf{F} \cdot d\vec{X}^{(1)}) \times (\mathbf{F} \cdot d\vec{X}^{(2)})] \cdot (\mathbf{F} \cdot d\vec{X}^{(3)}).$$

Použitím identity ze str. 04,

$$J(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} = [(\mathbf{F} \cdot \vec{A}) \times (\mathbf{F} \cdot \vec{B})] \cdot (\mathbf{F} \cdot \vec{C})$$

dostaneme:

$$dv = \det \mathbf{F} \, dV = J \, dV$$

Změny objemu

Srovnáme objem infinitesimálního rovnoběžnostěnu před deformací,

$$dV := (d\vec{X}^{(1)} \times d\vec{X}^{(2)}) \cdot d\vec{X}^{(3)},$$

a po deformaci,

$$dv := (d\vec{x}^{(1)} \times d\vec{x}^{(2)}) \cdot d\vec{x}^{(3)} = [(\mathbf{F} \cdot d\vec{X}^{(1)}) \times (\mathbf{F} \cdot d\vec{X}^{(2)})] \cdot (\mathbf{F} \cdot d\vec{X}^{(3)}).$$

Použitím identity ze str. 04,

$$J(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} = [(\mathbf{F} \cdot \vec{A}) \times (\mathbf{F} \cdot \vec{B})] \cdot (\mathbf{F} \cdot \vec{C})$$

dostaneme:

$$dv = \det \mathbf{F} \, dV = J \, dV$$



Determinant gradientu napětí v materiálových prostředích musí být vždy kladný.