Mechanika kontinua – část 1
Úvod a Geometrie deformace

Kontakt na vyučující

Ondřej Čadek – garant (ondrej.cadek@mff.cuni.cz)
Vojtěch Patočka – přednáška/cvičení (vojtech.patocka@mff.cuni.cz)

Katedra geofyziky MFF, katedrový objekt Troja, 11. patro

Přednáška – středa 8:10 – 9:40, **cvičení** – dle rozvrhu

Požadavky pro udělení zápočtu

vypracování 5 domácích úkolů

Zkouška

vypracování písemky na konci semestru
nebo
test/ústní zkouška v průběhu zkouškového období

Konzultace

kdykoliv u přednášejícího nebo cvičícího po předchozí domluvě, jednotlivě i ve skupinách

Materiály lze stáhnout na **http://geo.mff.cuni.cz/~patocka/**,

Studenti se speciálními potřebami – prosím, kontaktujte mě

Cíle přednášky

- Důkladná znalost teorie mechaniky kontinua, která vám umožní se v budoucnosti zabývat zajímavými praktickými problémy.
- Zkušenosti s popisem fyzikálního systému pomocí parciálních diferenciálních rovnic.
- Větší zručnost při maticových úpravách a práci s diferenciálními operátory, procvičení aparátu matematické fyziky.
- První setkání s některými fyzikálními jevy, na které v základním kurzu fyziky nezbyl čas.
- Jemný úvod do metod numerického řešení parciálních diferenciálních rovnic.

Cíle přednášky

- ~~Důkladná~~ znalost teorie mechaniky kontinua, která vám umožní se v budoucnosti zabývat zajímavými ~~praktickými~~ problémy.
- Zkušenosti s popisem fyzikálního systému pomocí parciálních diferenciálních rovnic.
- Větší zručnost při maticových úpravách a práci s diferenciálními operátory, procvičení aparátu matematické fyziky.
- První setkání s některými fyzikálními jevy, na které v základním kurzu fyziky nezbyl čas.
- Jemný úvod do metod numerického řešení parciálních diferenciálních rovnic.

Mechanika kontinua

Jedna z větví klasické mechaniky. Zabývá se kinematikou a mechanickým chováním materiálů, které jsou pojímány jako spojité prostředí – kontinuum (a nikoliv tedy jako soubor diskrétních částic).



Augustin-Louis Cauchy
1789-1857

Základní koncepce

- Látka objektu zcela vyplňuje prostor, který zaujímá.
- Skutečnost, že látka je tvořena atomy (a není tedy spojitá), je ignorována. Objekty jsou studovány na délkových škálách, které jsou výrazně větší než vzdálenosti mezi atomy.
- Na takto pojímané prostředí jsou aplikovány základní zákony zachování, které spolu s informací o makroskopických vlastnostech prostředí (konstitutivní rovnice) poskytují systém diferenciálních rovnic popisujících chování objektu.

Mechanika kontinua se zabývá fyzikálními vlastnostmi a chováním pevných látek a tekutin, které jsou nezávislé na konkrétním souřadném systému, v němž jsou pozorovány. Fyzikální popis je zprostředkován pomocí tenzorů, matematických objektů, jejichž vlastnosti nezávisí na zvoleném souřadnicovém systému.

Koncept spojitého prostředí

Pevné látky, kapaliny a plyny jsou tvořeny molekulami, které jsou od sebe odděleny „prázdným“ prostorem. Ale ani na makroskopické škále nemusí být materiály dokonale spojité – mohou obsahovat trhliny, kavity, póry apod.

Řada fyzikálních jevů může být přesto studována metodami mechaniky kontinua, tj. s využitím předpokladu, že se jedná o spojitá materiálová tělesa, která zcela vyplňují objem, který v prostoru zaujímají. *V tomto popisu chápeme kontinuum jako prostředí, které může být spojitě rozděleno na infinitesimální elementy, které mají stejné vlastnosti jako celek.*

Platnost předpokladu spojitosti může být verifikována na základě analýzy, při níž je testováno, zda na zvolené prostorové škále vykazuje materiál známky periodicity, nebo zda je jeho *mikrostruktura statisticky homogenní a ergodická*.

Předpoklad spojitosti úzce souvisí s pojmem *reprezentativní elementární objem* (*REV, representative elementary volume*) a separací škál na základě *Hill-Mandelovy podmínky*. REV může být vyhodnocen pouze v omezené míře, a to na základě experimentálních testů, které by měly potvrdit, že konstitutivní odezva materiálu je na dané prostorové škále homogenní.

U tekutin se někdy pro posouzení vhodnosti spojitého popisu na dané prostorové škále používá tzv. *Knudsenovo číslo* (Martin Knudsen, 1871-1947, Dánsko): $\mathrm{Kn} = \lambda/\mathrm{L}$, kde λ je střední volná dráha částice a L je charakteristický rozměr ($\mathrm{Kn} \approx 1 \rightarrow$ statistický popis).

Předpoklad spojitosti neplatí resp. nelze provést separaci škál → *statistická mechanika*.



Augustin-Louis Cauchy
1789-1857



Augustin-Louis Cauchy
1789-1857



Carl Friedrich Gauss
1777-1855

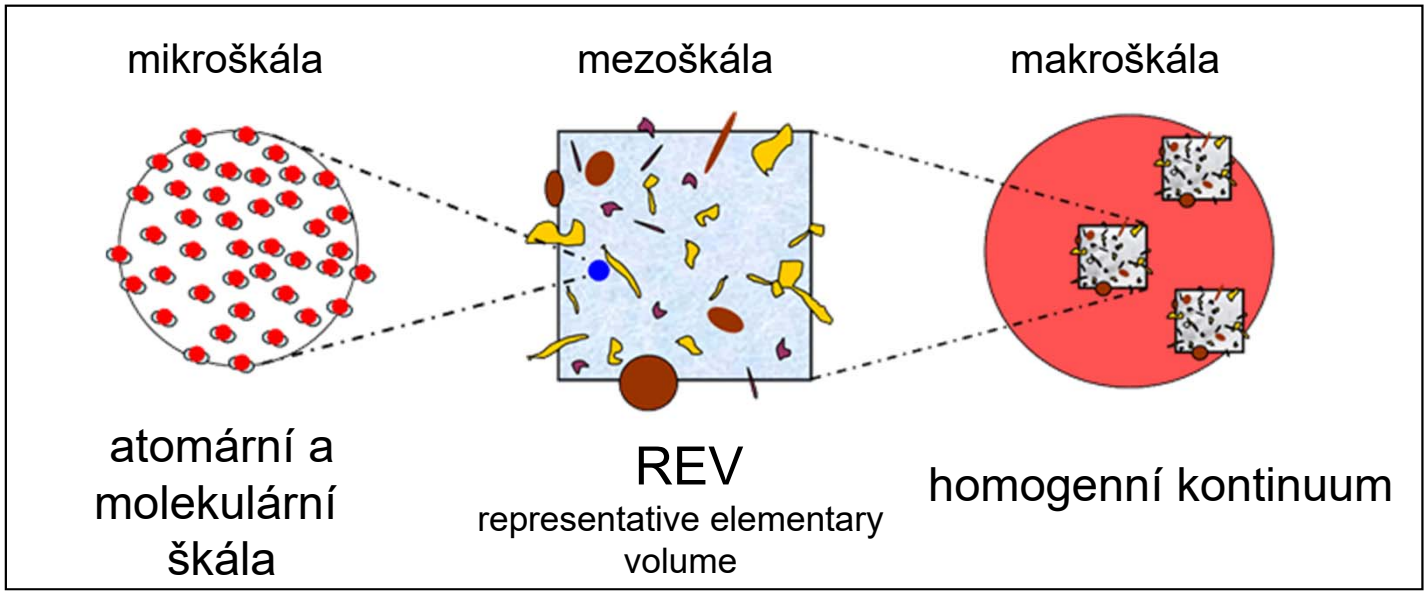
Mechanika kontinua

- část klasické fyziky zabývající se deformací těles
- základní teorie byla formulována v průběhu v 19. století
- významné praktické i vědecké aplikace při studiu makrosvěta

Koncept kontinua

- látka je nahlížena jako spojité prostředí, které může být popsáno parciálními diferenciálními rovnicemi
- platnost je omezena na prostorové škály, na nichž může být ignorována diskrétní struktura látky

Reprezentativní elementární objem



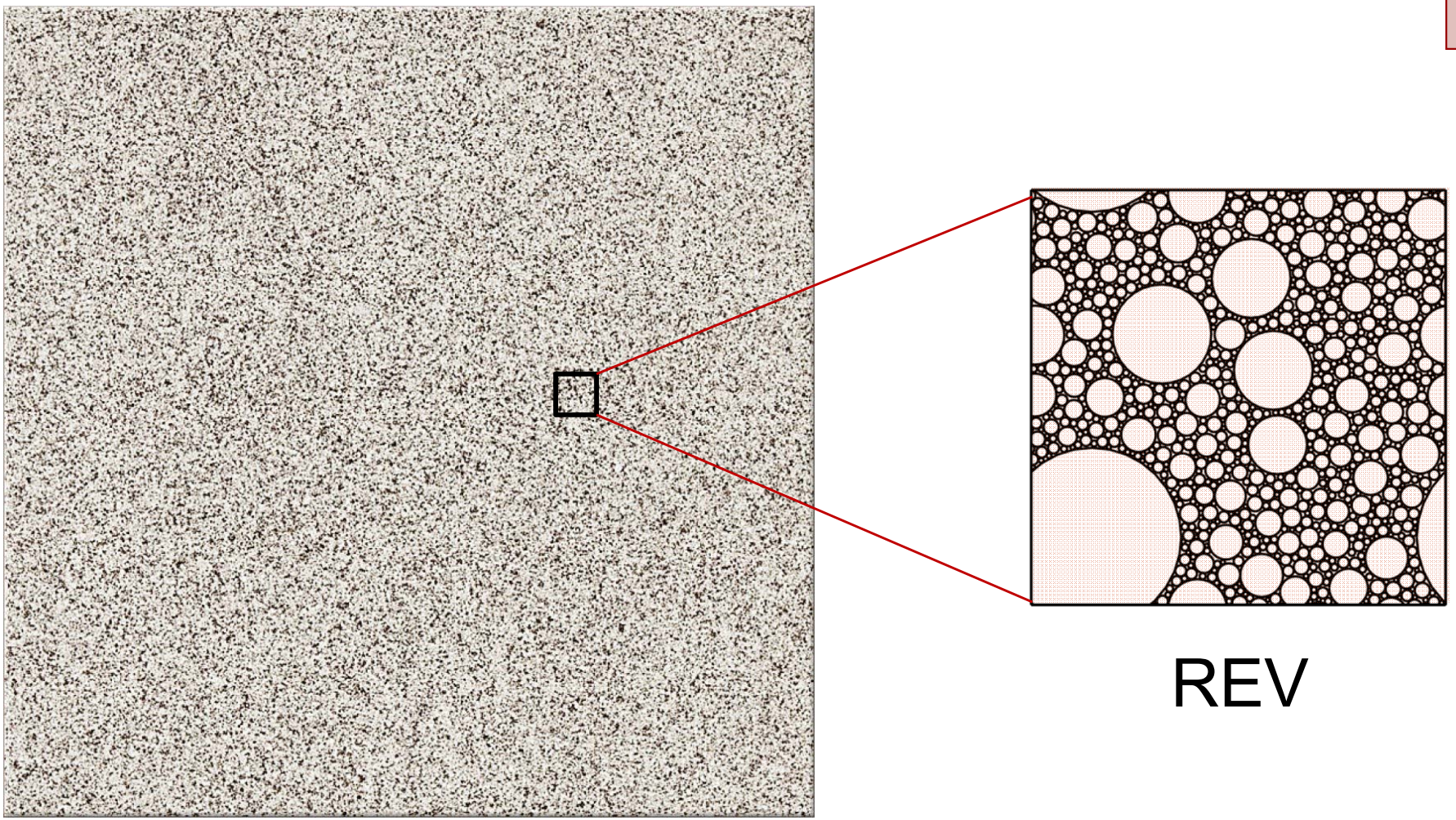
Hill-Mandelova podmínka (podmínka makro-homogenity):

$$< \sigma : e >= \Sigma : E =< \sigma >:< e >$$

σ: tenzor napětí; e: tenzor deformace

kde $\Sigma = \frac{1}{V}\int_{\Omega} \sigma \mathrm{d}\Omega =< \sigma >$ a $E = \frac{1}{V}\int_{\Omega} e \mathrm{d}\Omega =< e >$

$\int_{\Omega}$: Integrál přes objemový element



- Deformaci můžeme metodami mechaniky kontinua studovat pouze na prostorové škále, která je výrazně větší než REV.
- REV musí statisticky reprezentovat studovaný materiál a musí zahrnout všechny typy mikrostrukturních nehomogenit (zrna, inkluze, dutiny apod.).
- Od chvíle, kdy těleso popíšeme rovnicemi mechaniky kontinua, chápeme ho jako prostředí, které může být spojitě rozděleno na infinitesimální elementy, jejichž materiálové vlastnosti lze popsat jako polní veličinu.

Mechanika kontinua

Mechanika pevných látek
- zabývá se deformací těles s definovaným klidovým tvarem (*solid mechanics*)

Elasticita
- popisuje materiály, které se vracejí do původního stavu, když odejmeme sílu, která je deformuje

Plasticita
- popisuje materiály, které se trvale deformují, pokud jsou vystaveny dostatečně vysokému napětí

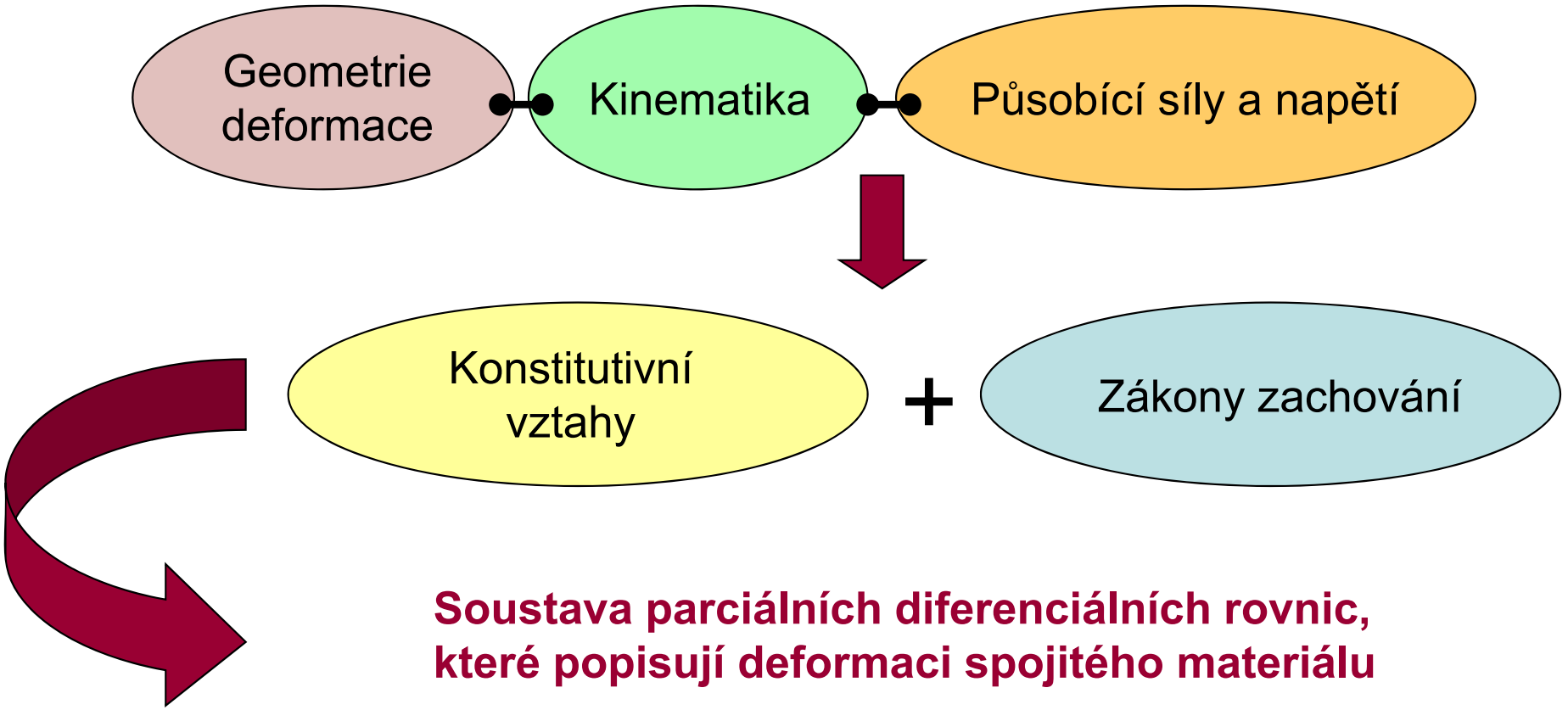
Mechanika tekutin
- zabývá se spojitými materiály, v nichž střižná napětí vždy způsobí pohyb (*fluid mechanics*)

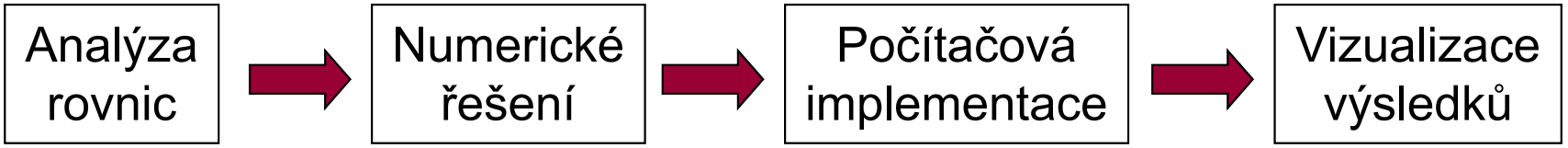
Newtonovské tekutiny
- jsou charakterizovány viskozitou, která má povahu materiálové konstanty; rychlost deformace je přímo úměrná smykovému napětí

Nenewtonovské tekutiny
- viskozita není materiálová konstanta a závisí na okamžité deformaci; rychlost deformace není obecně úměrná smykovému napětí

Reologie
- studium deformační odezvy materiálů

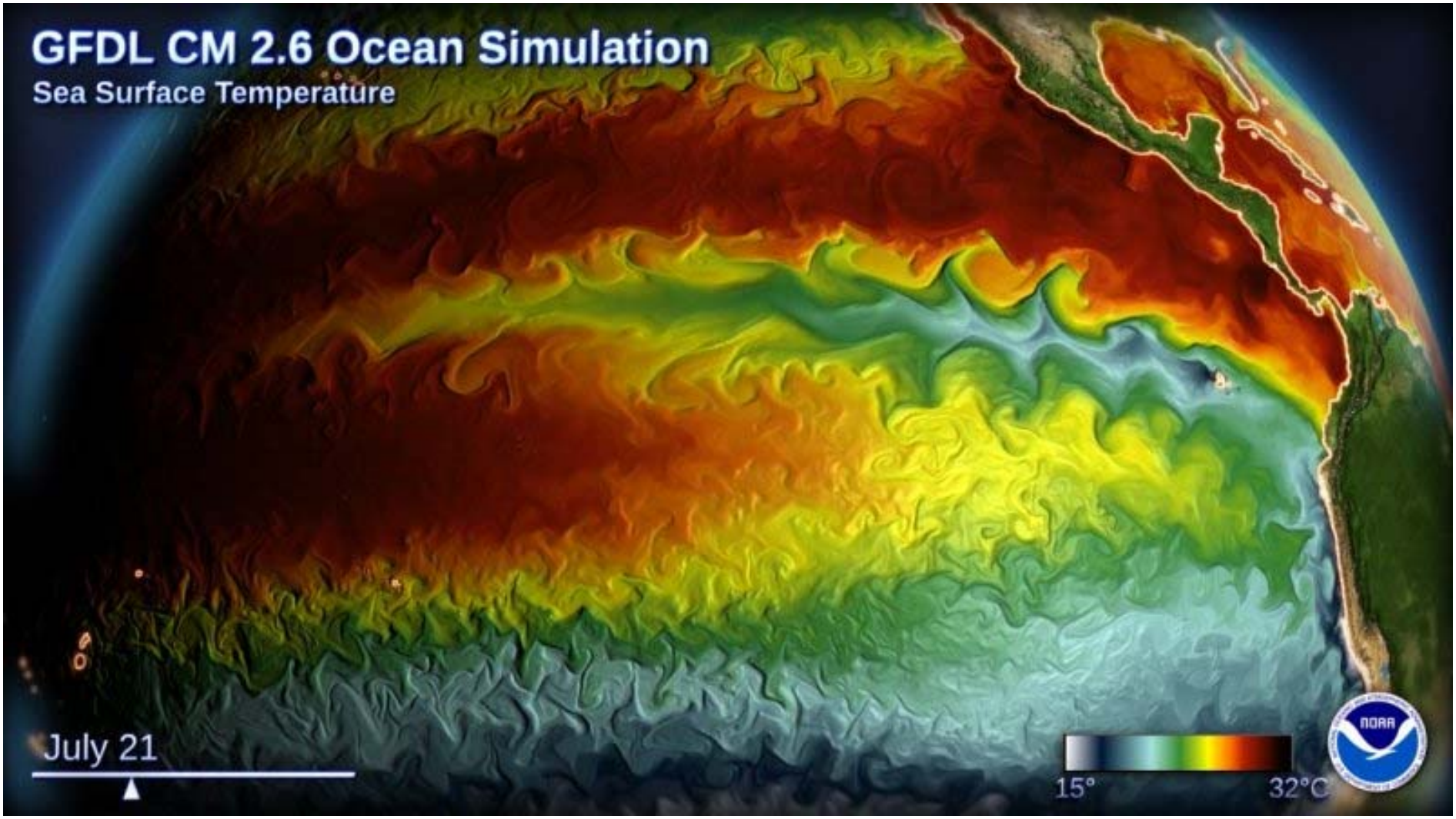
V rámci mechaniky kontinua se dnes studují také křehké, sypké a lámavé materiály, vícefázové směsi (asfalt, tající led apod.), kvantové kapaliny a další materiály.


Geometrie deformace
Kinematika
Působící síly a napětí
Konstitutivní vztahy
+
Zákony zachování
Soustava parciálních diferenciálních rovnic, které popisují deformaci spojitého materiálu


Analýza rovnic
Numerické řešení
Počítačová implementace
Vizualizace výsledků

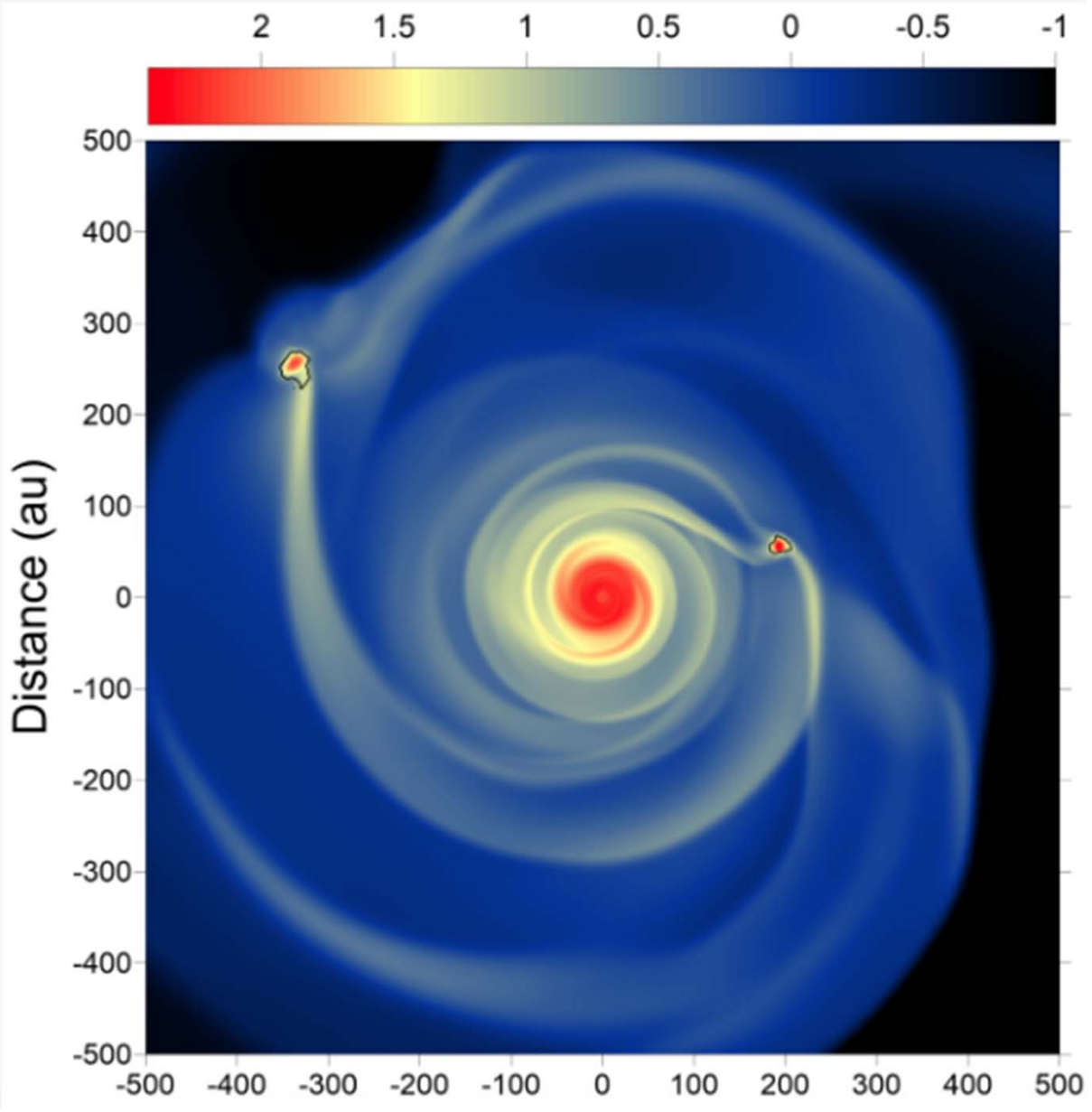
Oceány a atmosféra

https://www.youtube.com/watch?v=R5-s6O8qyvE

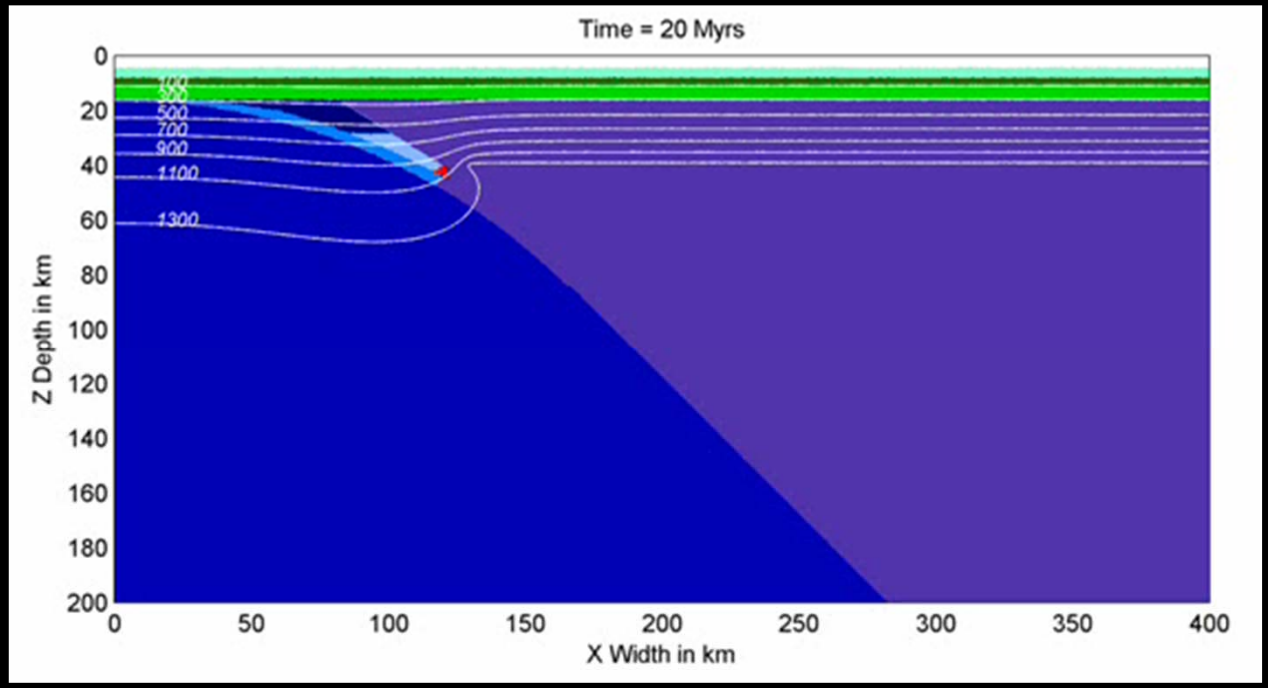


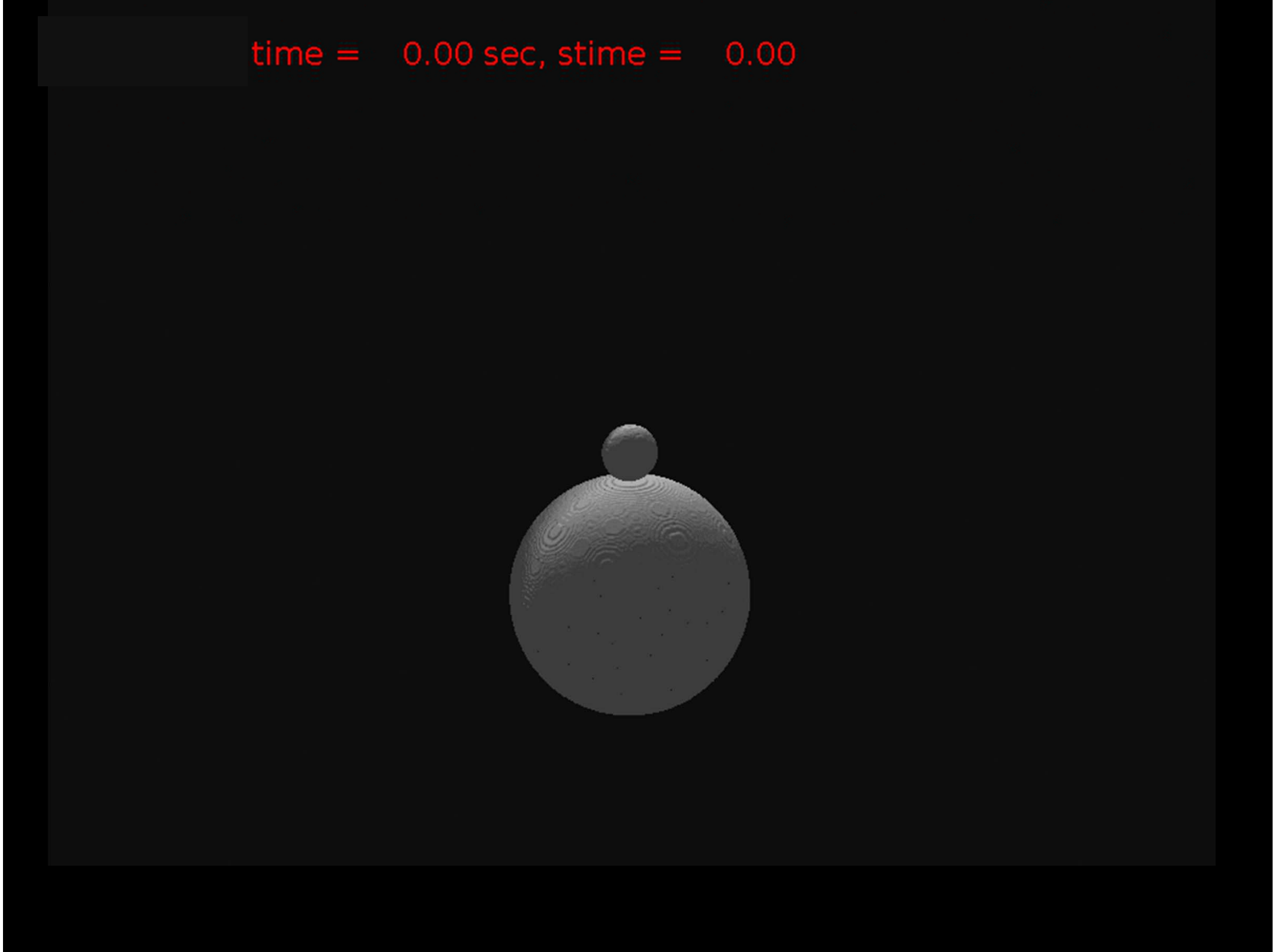
Astrofyzika

Figure 1. Gravitationally unstable protoplanetary disk with two clumps. Shown are the gas surface density distribution and black contour curves outlining the clumps according to our clump capturing mechanism. The color bar is in log g cm^{-2}.



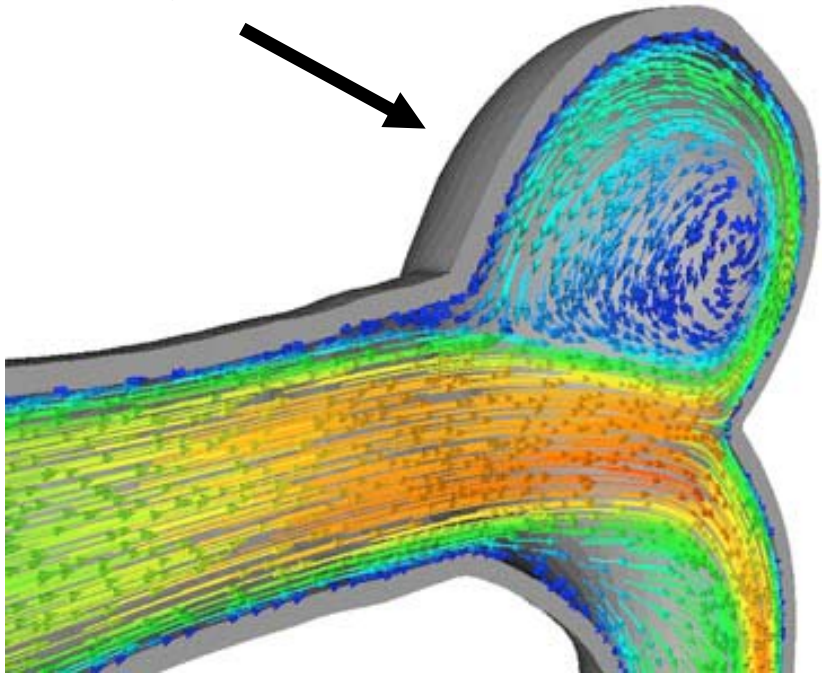
Geofyzika a planetologie

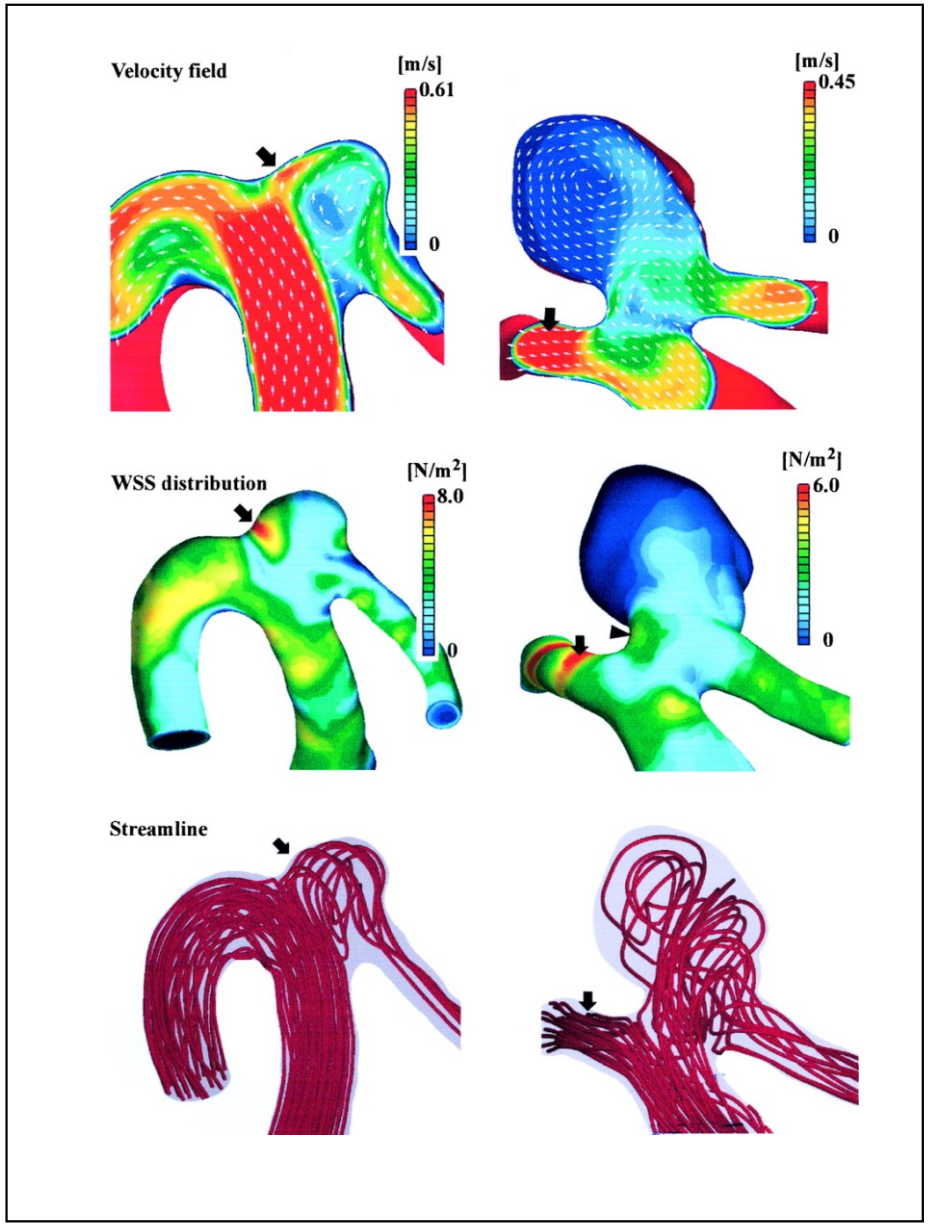



time = 0.00 sec, stime = 0.00

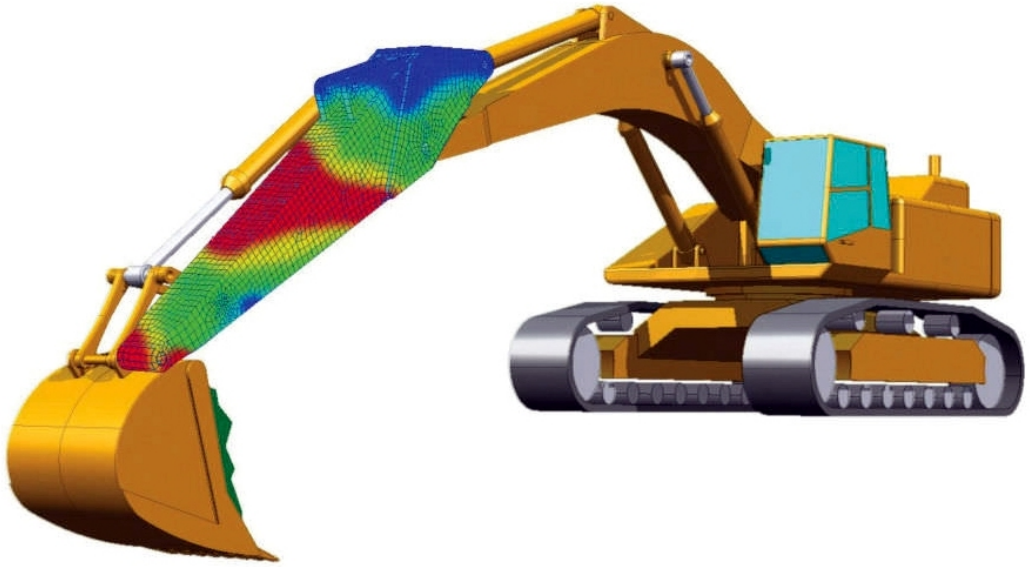
Aplikace v biologii a medicíně

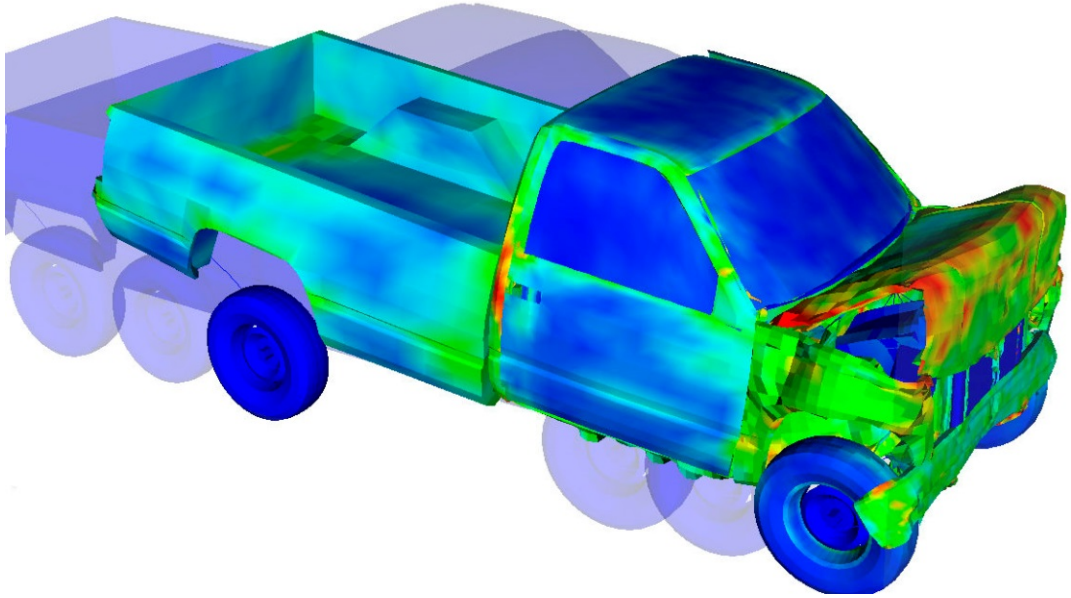
Aneurysma

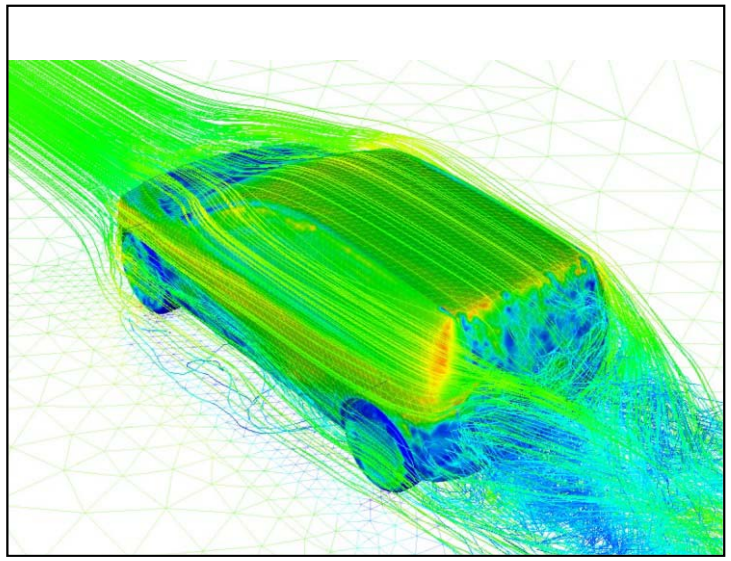


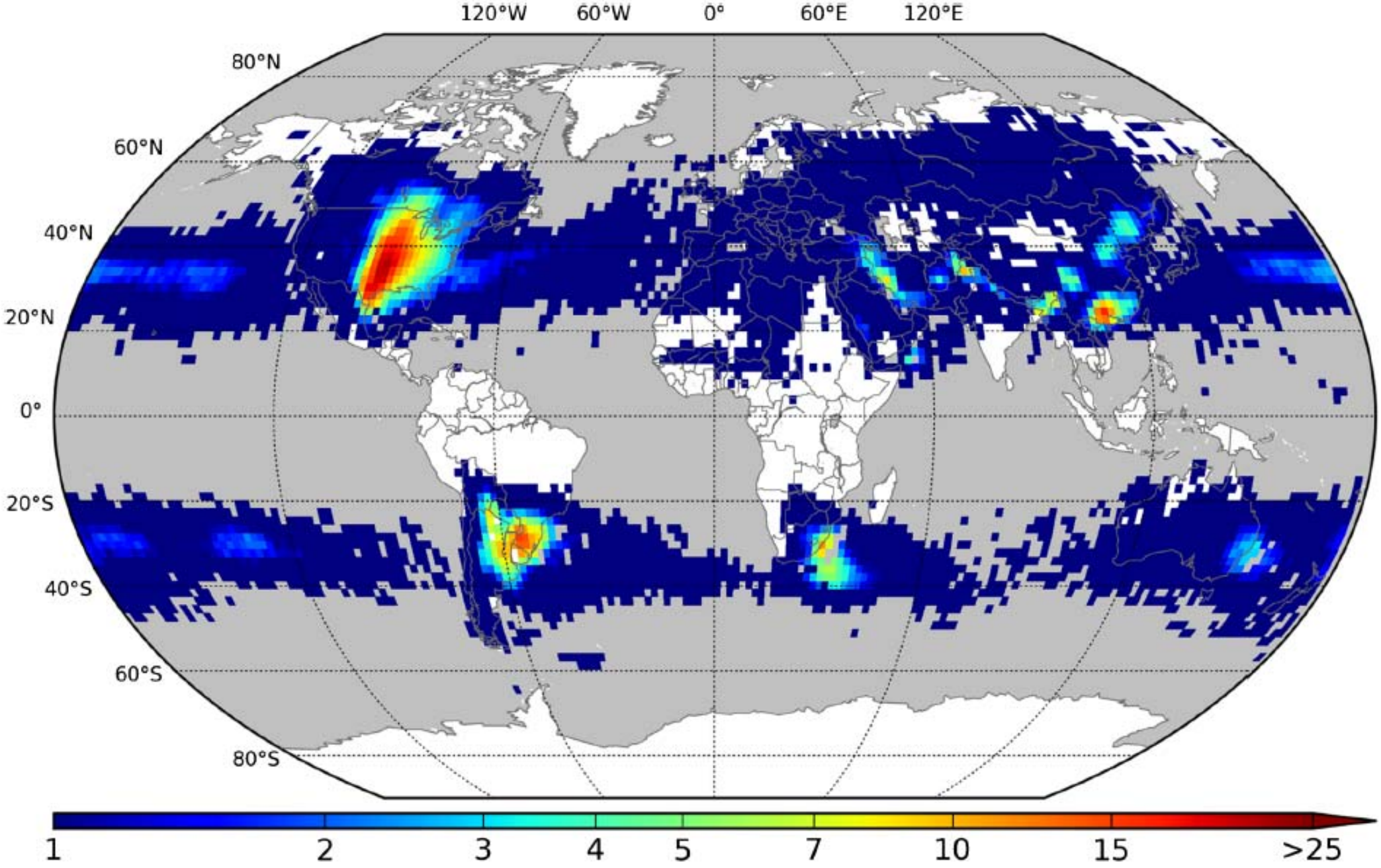


Průmyslové aplikace








120°W
60°W
0°
60°E
120°E
80°N
60°N
40°N
20°N
0°
20°S
40°S
60°S
80°S
1
2
3
4
5
7
10
15
>25

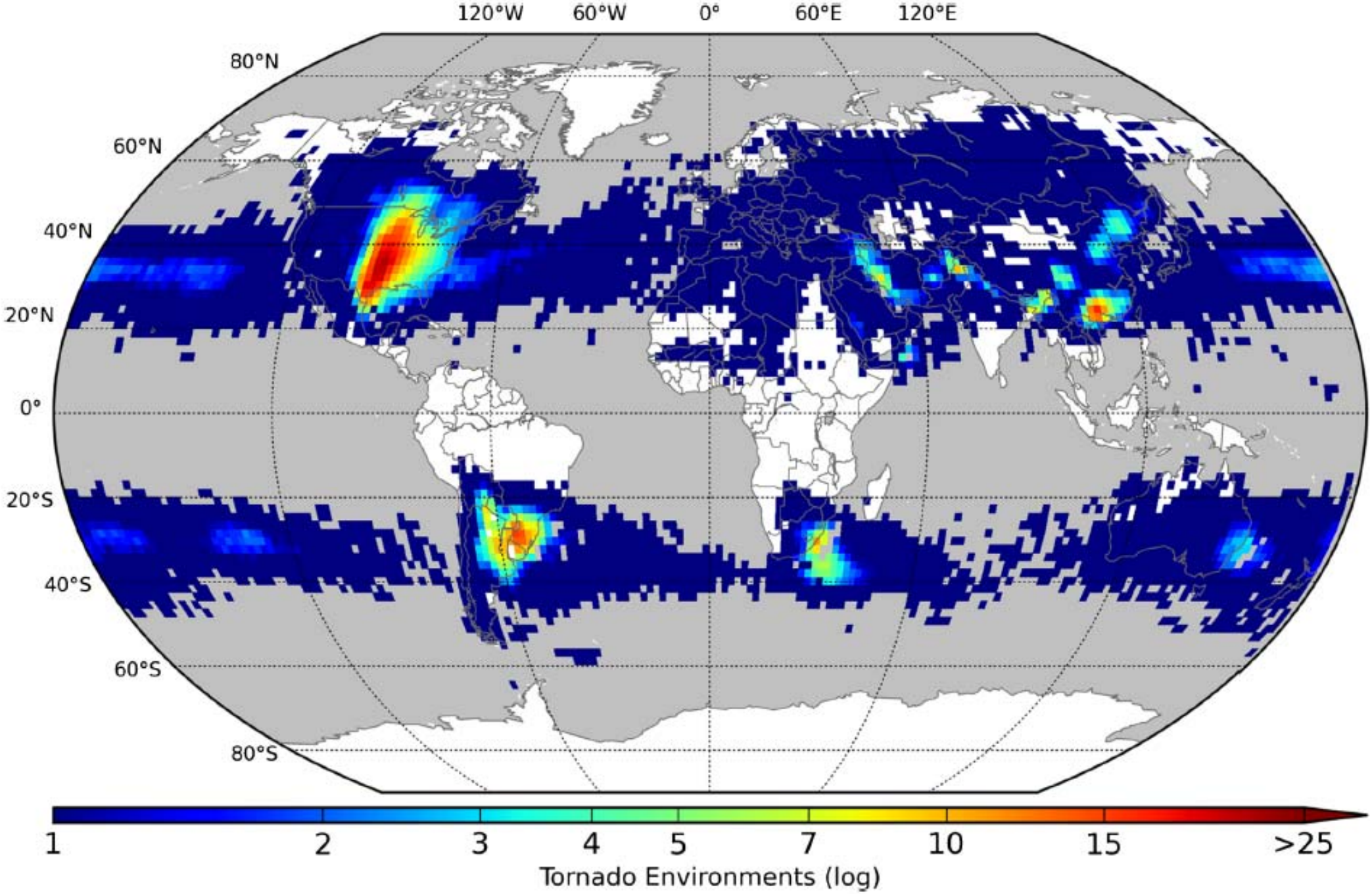


Fig. 2 Frequency of tornado environments as determined from the NCEP/NCAR reanalysis using a discriminator of 0–1 km bulk vertical wind shear, lifted condensation level and elevation for the period 1958–1999. Adapted from Brooks et al. [14]

Způsob zápisu

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = v_i u_i, \quad \vec{v} \otimes \vec{u} = v_i u_j (\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j) = v_i u_j \mathbf{e}_{ij}$$

$$\mathbf{T} \cdot \vec{v} = T_{ij} v_j \vec{e}_i, \quad \vec{v} \cdot \mathbf{T} = T_{ji} v_j \vec{e}_i$$

$$\mathbf{T} : \mathbf{U} = T_{ij} U_{ji}, \quad \mathbf{T} \cdot \mathbf{U} = T_{ij} U_{jk} (\vec{e}_i \otimes \vec{e}_k) = T_{ij} U_{jk} \mathbf{e}_{ik}, \quad \mathbf{T}^2 = \mathbf{T} \cdot \mathbf{T}$$

Matematický aparát, který budeme potřebovat

Operace s maticemi $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T, \quad (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}, \quad (\mathbf{A}^{-1})^T = (\mathbf{A}^T)^{-1}$

Transformace vektorů a tenzorů při změně souřadné soustavy $\vec{v}' = \mathbf{Q} \cdot \vec{v}, \quad \mathbf{T}' = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{Q}^T$

Ortogonální matice $\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^{-1}, \quad \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{I}, \quad |\det \mathbf{Q}| = 1$

Vlastní čísla a vektory matice $\mathbf{A} \cdot \vec{v} = \lambda \vec{v}, \quad \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$

Determinant $\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \det \mathbf{A} \det \mathbf{B}, \quad \det \mathbf{A}^{-1} = (\det \mathbf{A})^{-1}, \quad \det \mathbf{A}^T = \det \mathbf{A}$

Diagonalizace matice, podobné matice, Jordanův rozklad

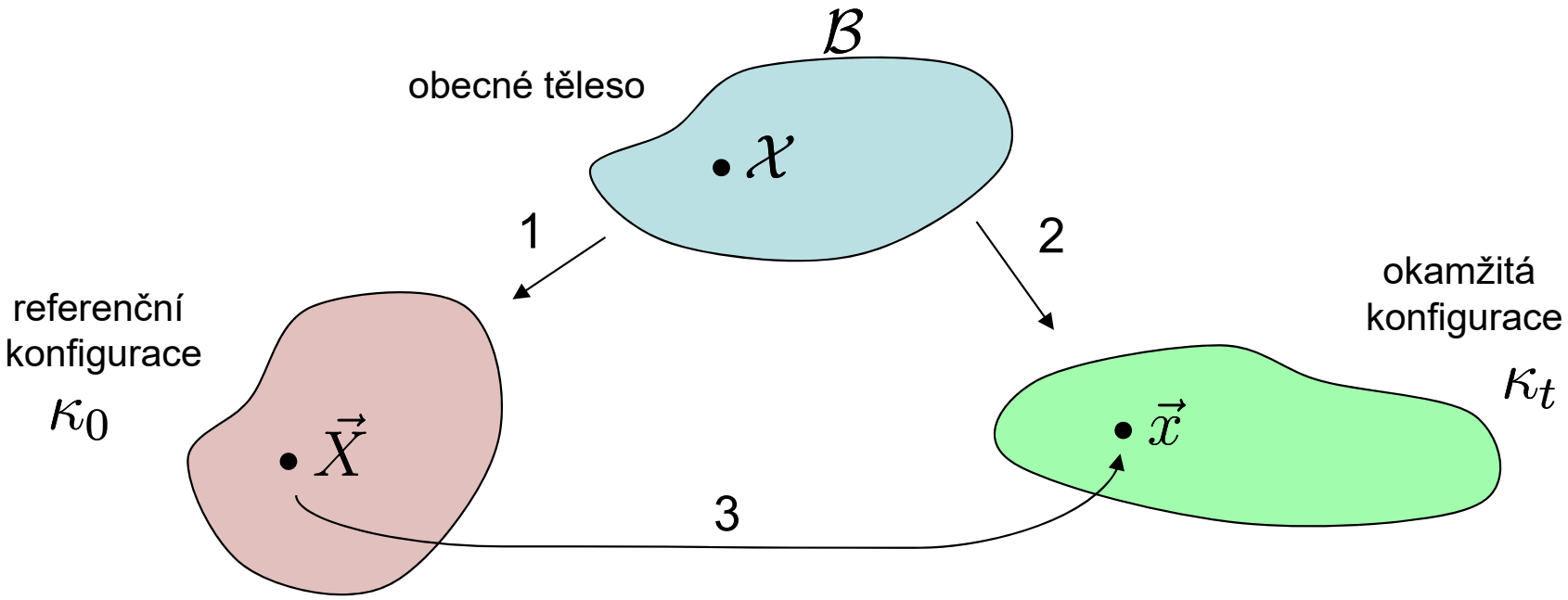
Pozitivně definitní matice $\vec{v} \neq 0 \Rightarrow \vec{v} \cdot \mathbf{A} \cdot \vec{v} > 0$

Odmocnina z matice $\sqrt{\mathbf{A}} = \mathbf{Q} \cdot \sqrt{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{Q}^{-1}$

Jacobián, diferenciální operátory: divergence, gradient, rotace

Gaussova věta, binomická věta, Taylorova věta etc. Viz také cvičení 1.

Deformační zobrazení



Zobrazení 1: $\vec{\gamma}_0$

$$\mathcal{B} \to E^3$$

$$\mathcal{X} \to \vec{X} = \vec{\gamma}_0(\mathcal{X})$$

Zobrazení 2: $\vec{\gamma}_t$

$$\mathcal{B} \to E^3$$

$$\mathcal{X} \to \vec{x} = \vec{\gamma}_t(\mathcal{X}, t)$$

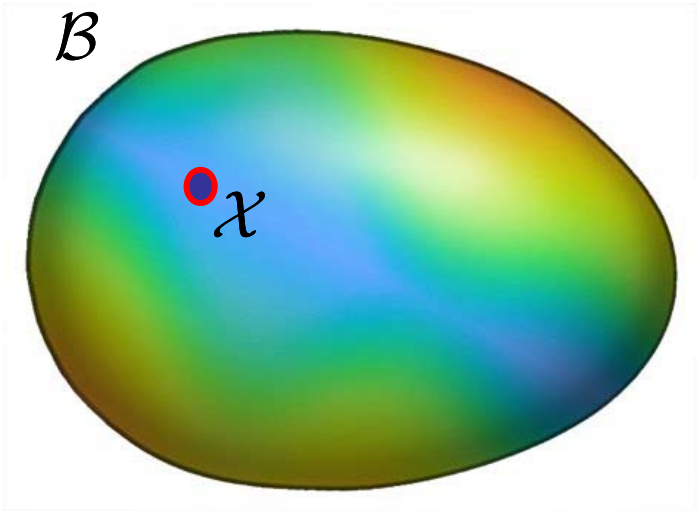
Zobrazení 3: $\vec{\chi}$

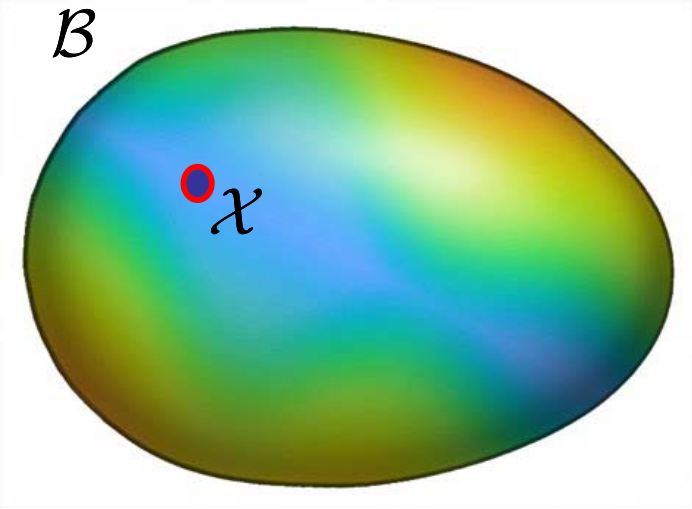
$$E^3 \to E^3$$

$$\vec{X} \to \vec{x} = \vec{\chi}(\vec{X}, t)$$

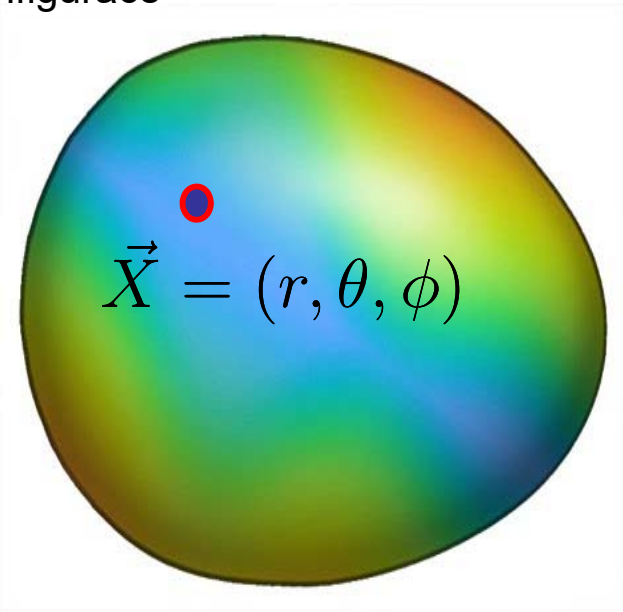
popisuje pohyb tělesa $\mathcal{B}$

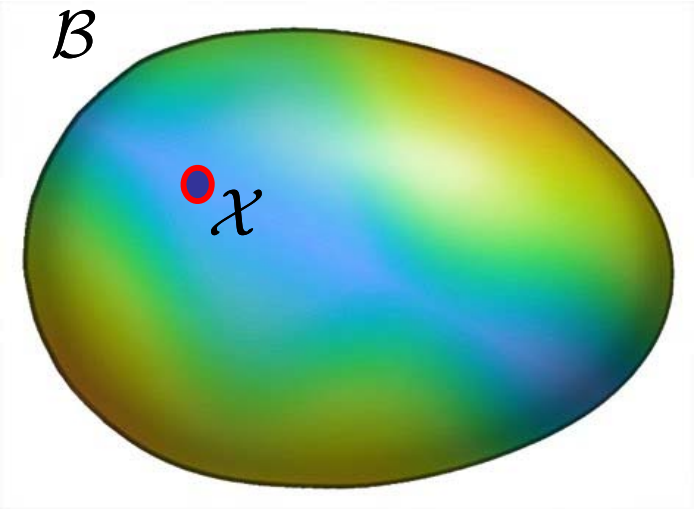
Poznámka:
Referenční konfigurace může být zvolena libovolně a nemusí obecně odpovídat reálnému tvaru tělesa.


$\mathcal{B}$
x

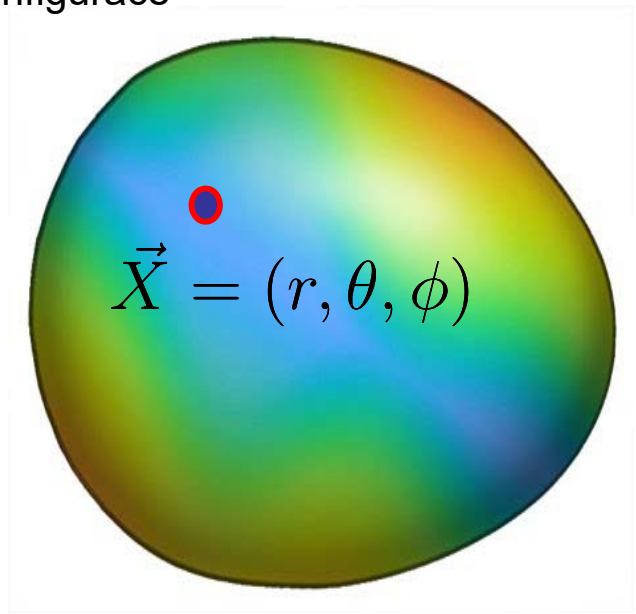


referenční
konfigurace

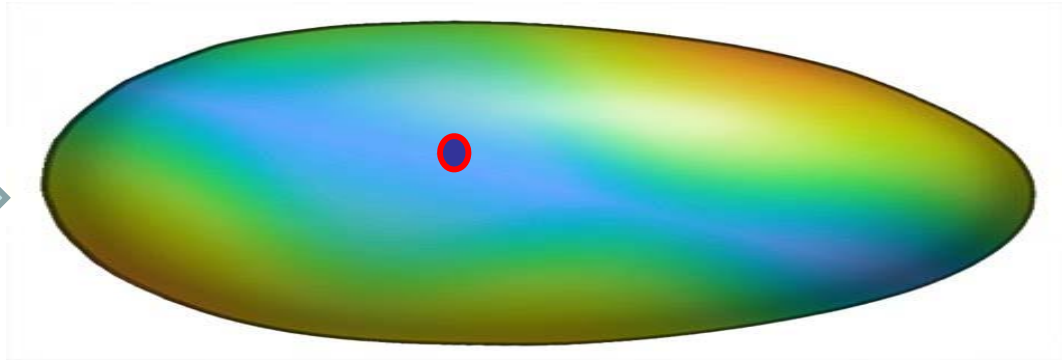


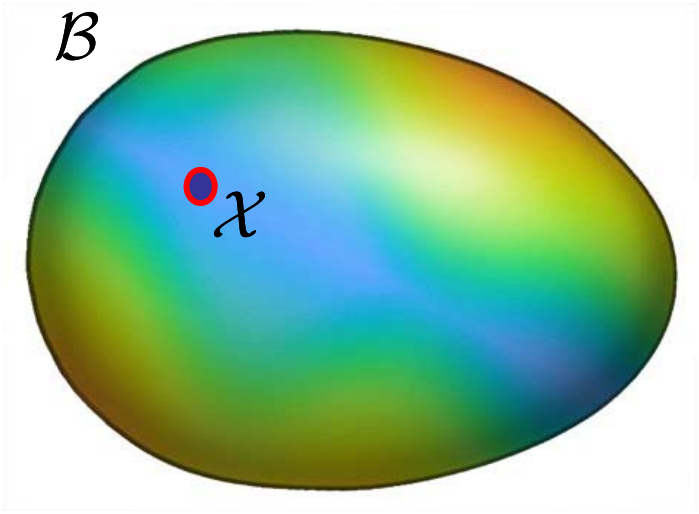


referenční konfigurace

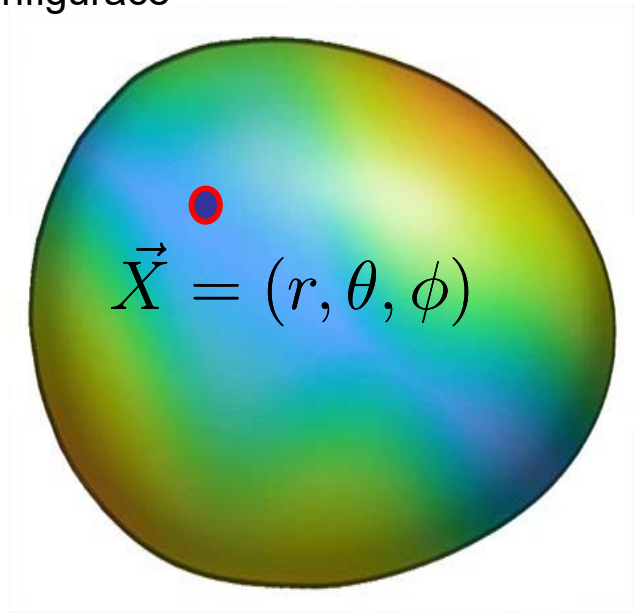


okamžitá konfigurace

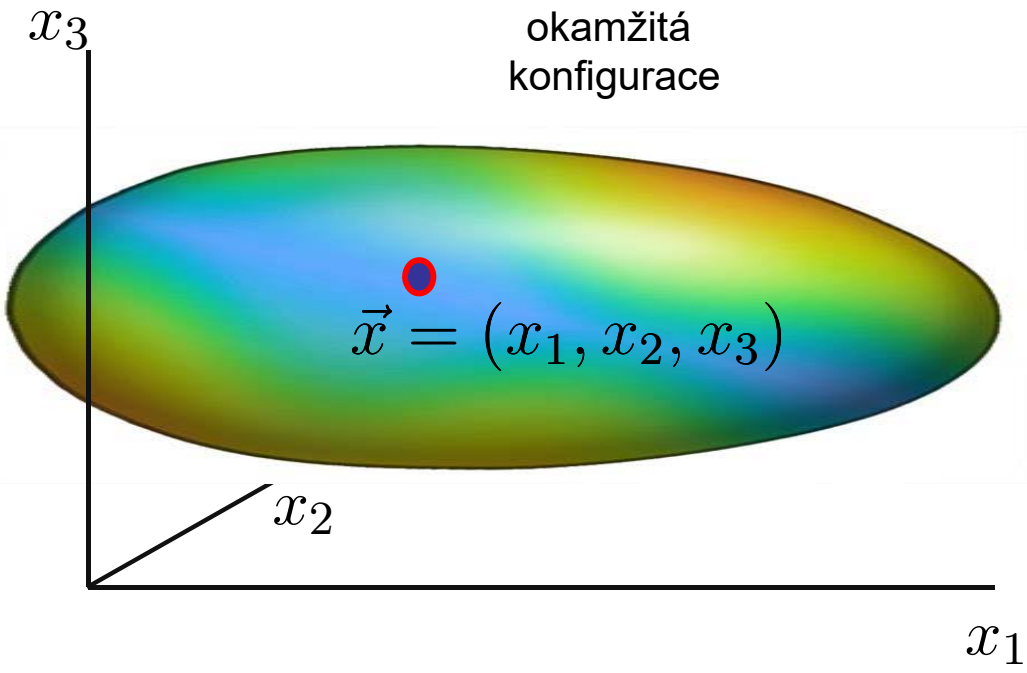


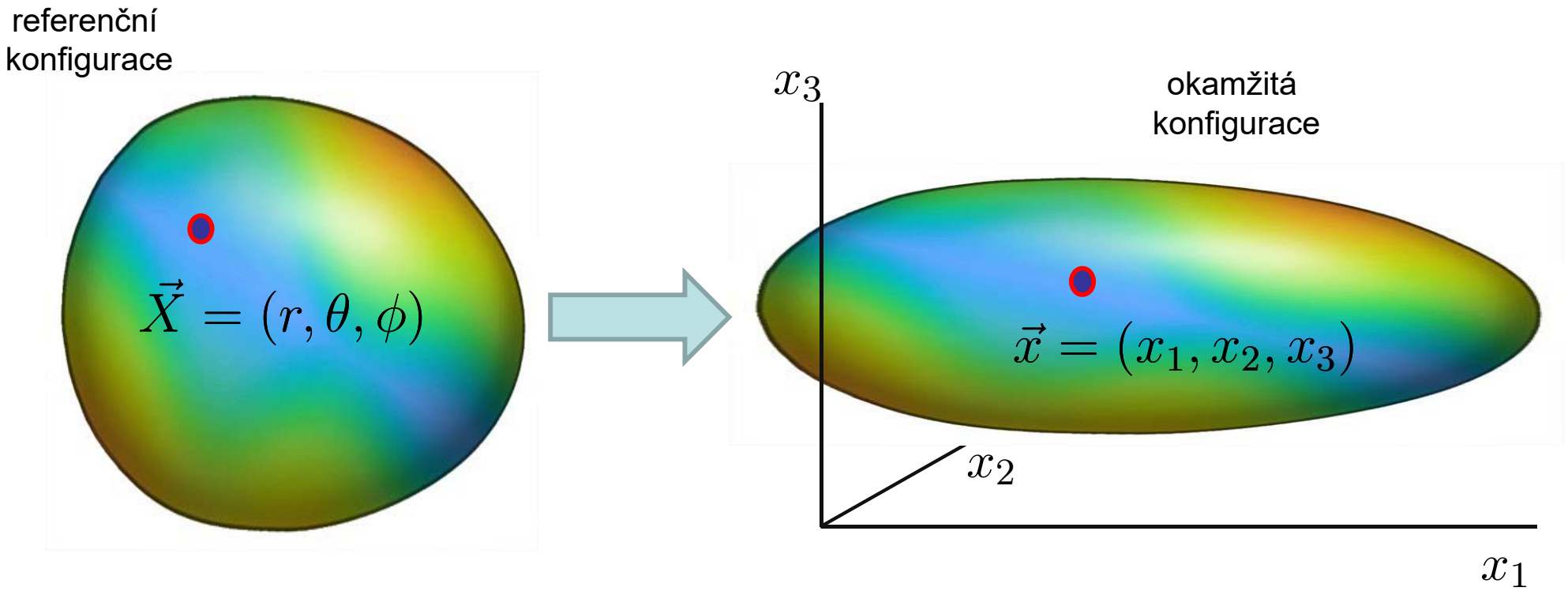


referenční konfigurace



okamžitá konfigurace

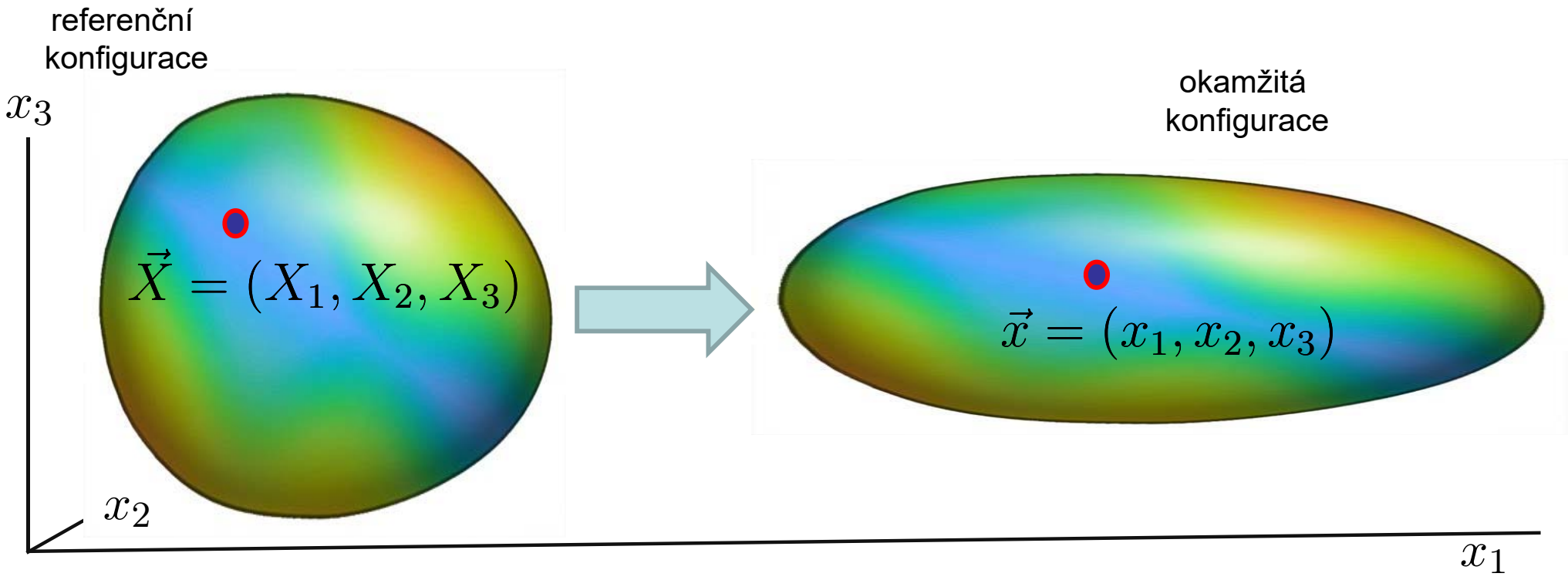




Deformační zobrazení

$$x_1 = \chi_1(r, \theta, \phi, t)$$
$$x_2 = \chi_2(r, \theta, \phi, t)$$
$$x_3 = \chi_3(r, \theta, \phi, t)$$

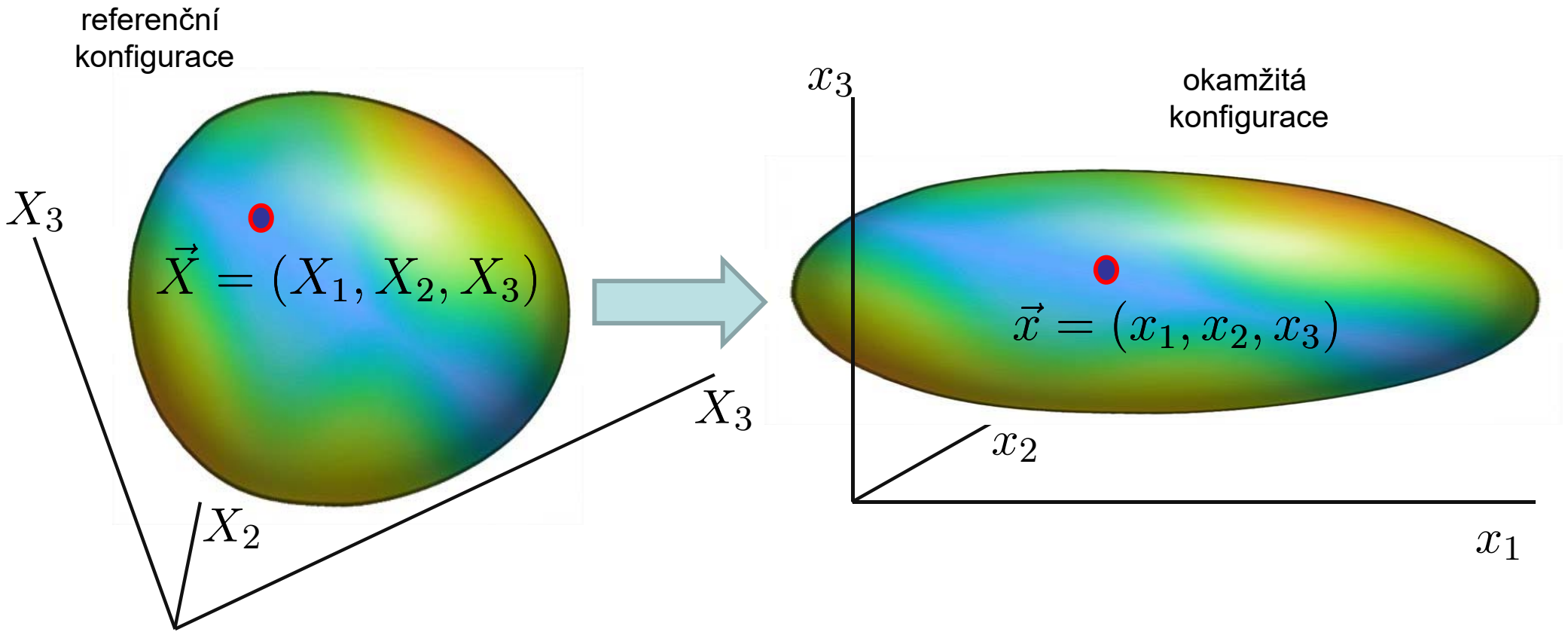
One observer, one frame (OOOF)



Deformační zobrazení

$$\vec{x} = \vec{\chi}(\vec{X}, t)$$

$$x_1 = \chi_1(X_1, X_2, X_3, t)$$
$$x_2 = \chi_2(X_1, X_2, X_3, t)$$
$$x_3 = \chi_3(X_1, X_2, X_3, t)$$

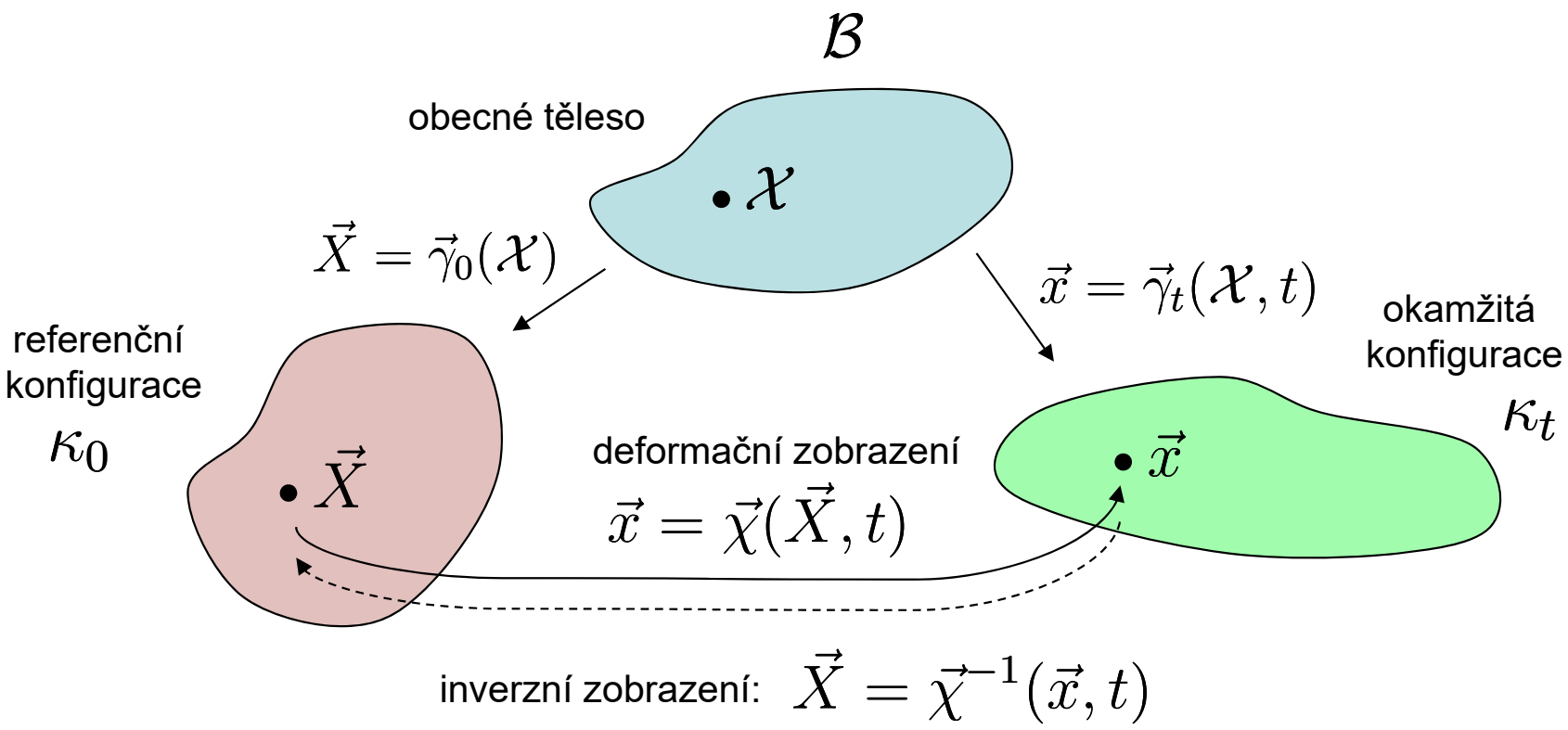


Deformační zobrazení

$$\vec{x} = \vec{\chi}(\vec{X}, t)$$

$$x_1 = \chi_1(X_1, X_2, X_3, t)$$
$$x_2 = \chi_2(X_1, X_2, X_3, t)$$
$$x_3 = \chi_3(X_1, X_2, X_3, t)$$

Deformační zobrazení



Axiom kontinuity

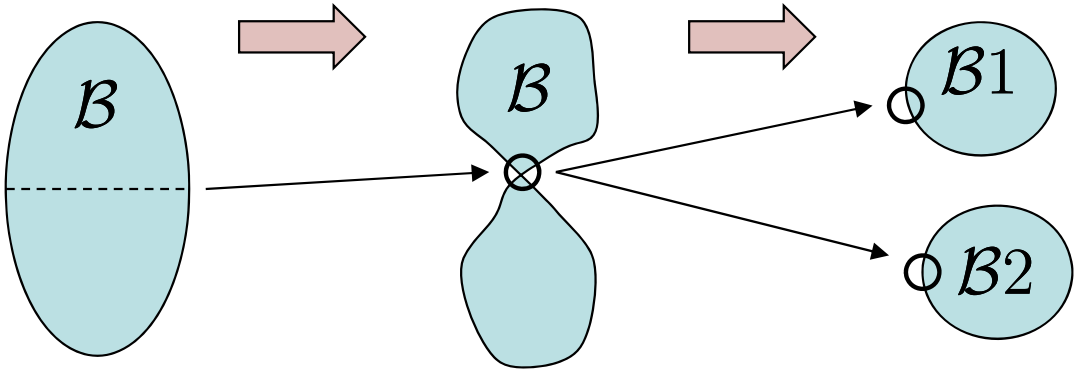
Předpokládáme, že funkce

$$\vec{\chi}$$

je jednoznačná, invertovatelná a má spojité derivace do libovolného řádu (s výjimkou některých singulárních bodů, křivek nebo povrchů).

Interpretace axiomu kontinuity: (i) Konečný objem materiálu nemůže být deformován do nulového nebo nekonečného objemu (materiál je nezničitelný). (ii) Části materiálu do sebe vzájemně nepronikají (materiál je neprostupný) – objem se vždy transformuje do objemu, povrch na povrch a křivka do křivky.

Poznámka: Existuje řada prakticky důležitých případů, kdy axiom kontinuity neplatí. V okolí singulárních bodů a ploch je pak třeba axiom kontinuity „změkčit“ a využít speciální postupy.



Příklady procesů, kdy axiom kontinuity neplatí: vznik nových povrchů, lámání, šíření trhlin apod.

Popis pohybu kontinua

1. Materiálový popis

$\vec{x} = \vec{\gamma}_t(\mathcal{X}, t)$ nezávislé proměnné: $\mathcal{X}, t$

2. Referenční popis

$\vec{x} = \vec{\chi}(\vec{X}, t)$ nezávislé proměnné: $\vec{X}, t$

Pokud jako referenční konfiguraci zvolíme tvar tělesa v čase t = 0, pak zpravidla hovoříme o **lagrangeovském** popisu. Terminologicky je často zaměňován s materiálovým popisem.

3. Prostorový (**eulerovský**) popis $\vec{x}, t$

Popis se vztahuje k okamžitému stavu kontinua v čase t v bodě x. Nevyžaduje zavedení částic. Běžný v mechanice tekutin.

Poznámka: Při řešení praktických úloh jsou často kombinovány různé popisy.

Pojmy *lagrangeovský* a *eulerovský* se používají v mechanice kontinua poměrně volně a v různých kontextech:

Lagrange:

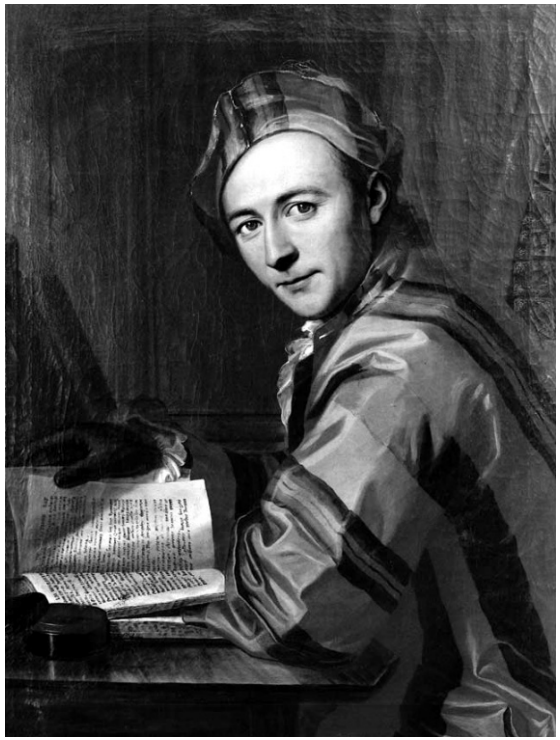
- popis vztažený k nedeformovanému stavu
- popis vztažený k částici
- jakýkoliv materiálový popis

Euler:

- popis vztažený k deformovanému stavu
- popis vztažený k pevnému bodu v prostoru
- popis nevyžadující částicový formalismus

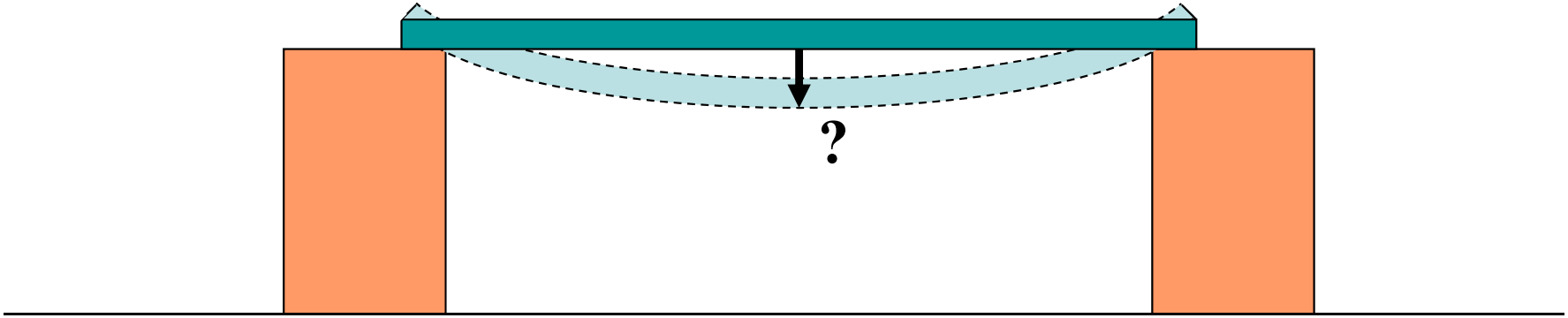


Joseph-Louis Lagrange
1736 Turín – 1813 Paříž



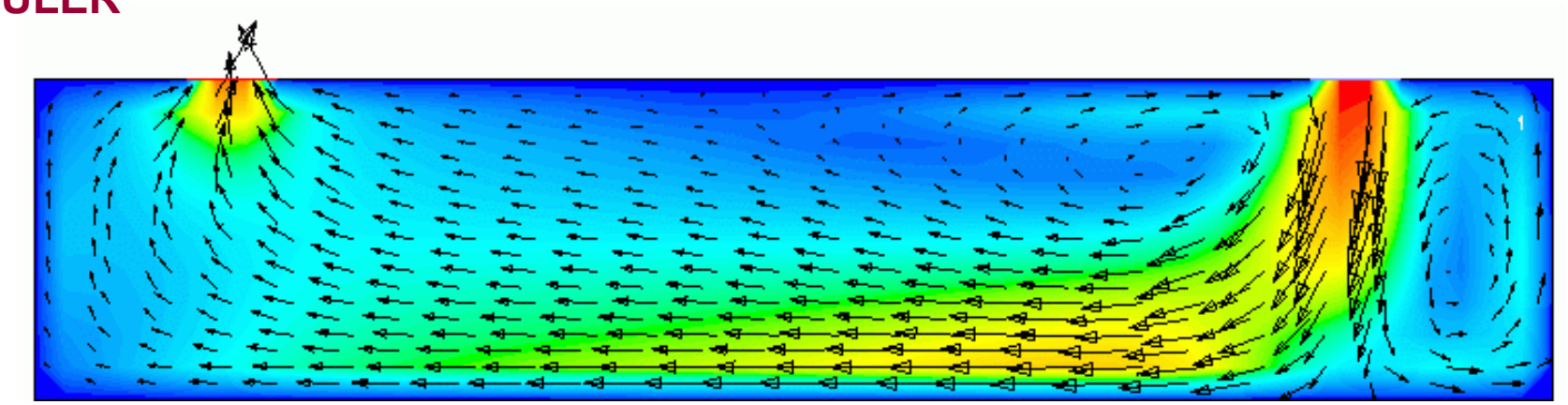
Leonhard Euler
1707 Basilej – 1783 St. Petěrburg

LAGRANGE

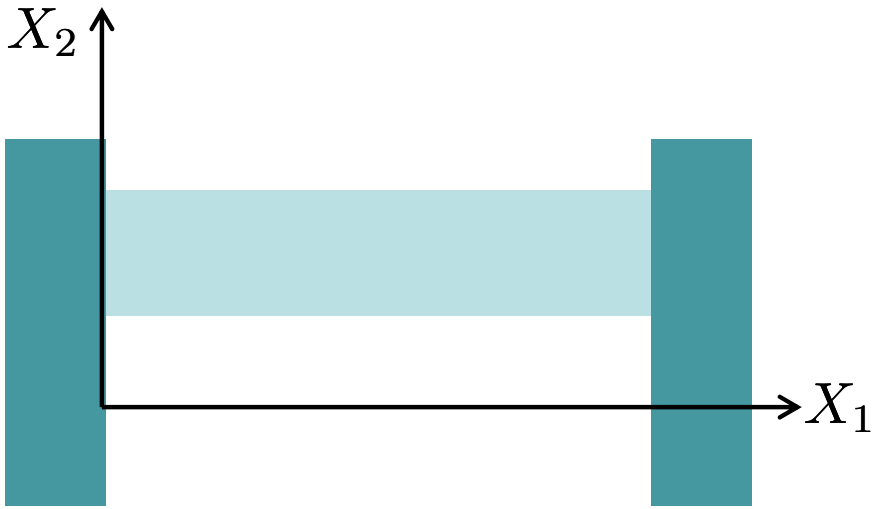


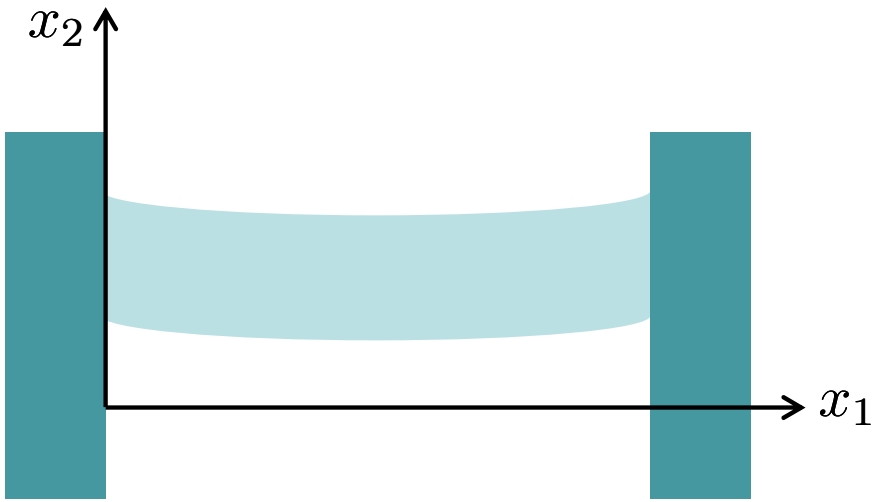
Elastická deformace nosníku vlastní vahou:
Známe počáteční (nedeformovaný) stav a predikujeme konečný stav.

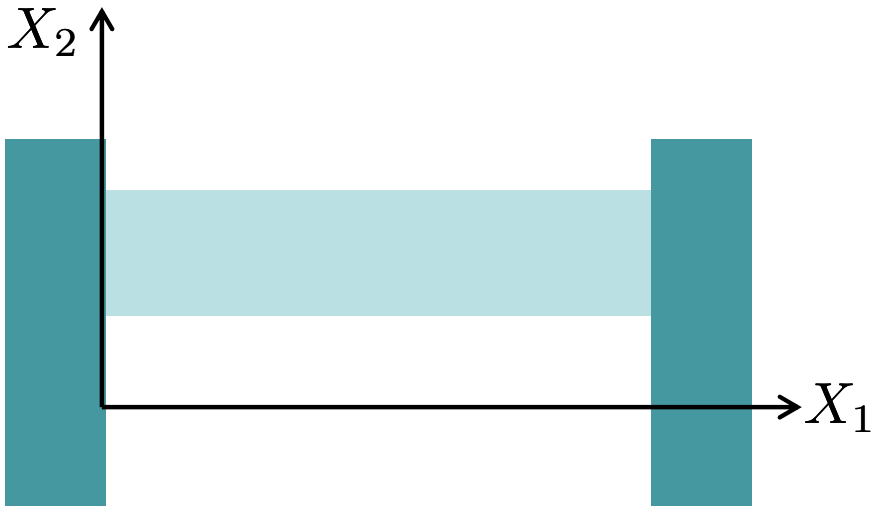
EULER

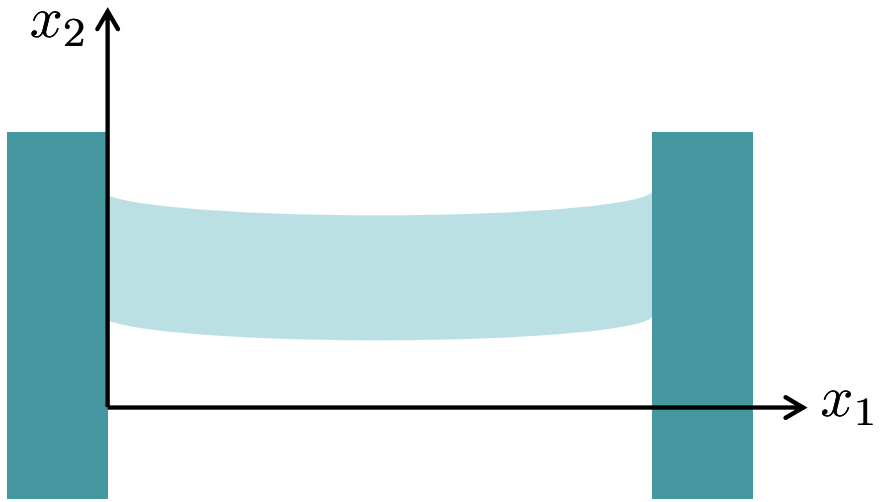


Proudící kapalina: Pohyb částic je složitý a zpravidla nás nezajímá, kde se částice nacházela v počátečním čase. Naším cílem je určit rychlost proudění kapaliny v závislosti na čase a poloze v prostoru.

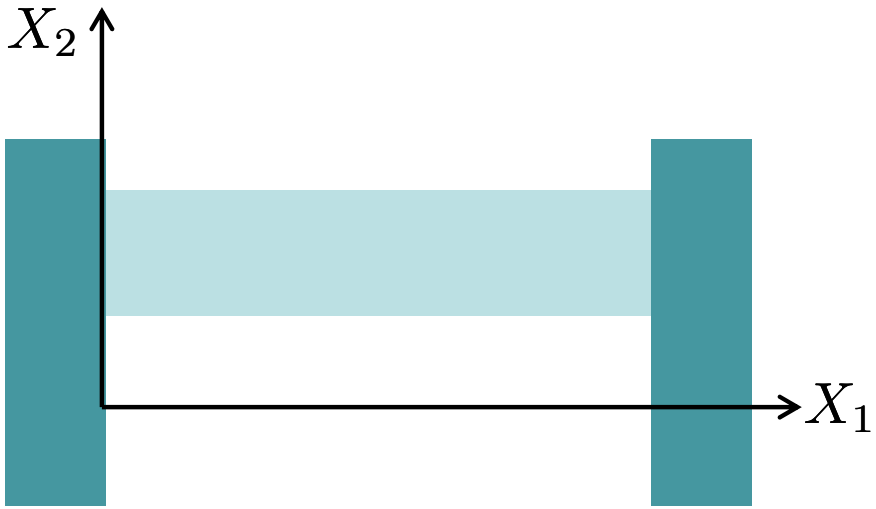

X_2
X_1

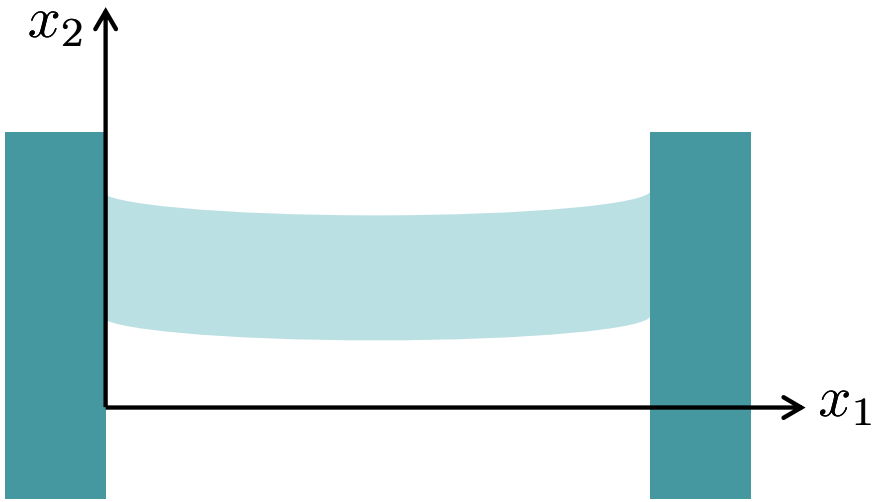

x_2
x_1





$$\operatorname{div} \mathbf{t} + \rho \vec{g} = 0$$

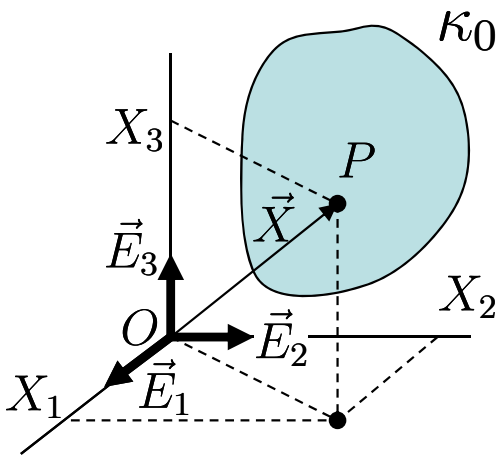


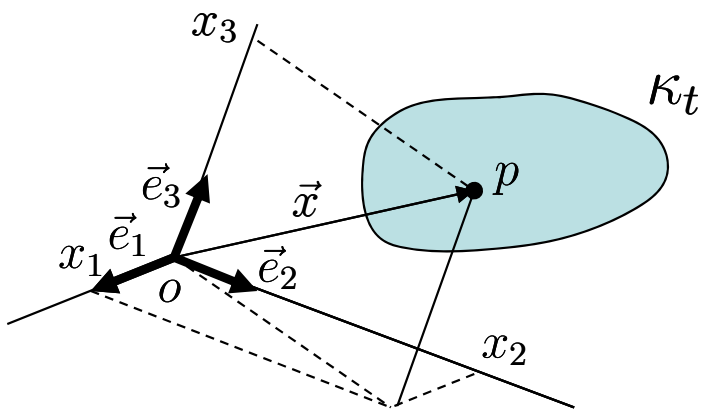


$$\mathbf{F}^{-T} : \operatorname{Grad} \mathbf{T} + \varrho_0 \det \mathbf{F}^{-1} \vec{g} = 0$$

$$\operatorname{div} \mathbf{t} + \rho \vec{g} = 0$$

Lagrangeovské a eulerovské souřadnice





$$\vec{X} = X_K \vec{E}_K$$

$$\vec{E}_K = \underbrace{(\vec{E}_K \cdot \vec{e}_k)}_{\delta_{Kk}} \vec{e}_k = \delta_{Kk}\vec{e}_k$$

kosinus úhlu mezi vektory $\vec{E}_K$ a $\vec{e}_k$
někdy se označuje jako posuvný tenzor (*shifter*)
(obecně se nejedná o Kroneckerův symbol !)

$$\vec{x} = x_k \vec{e}_k$$

$$\vec{e}_k = (\vec{e}_k \cdot \vec{E}_K)\vec{E}_K = \delta_{kK}\vec{E}_K$$

$$\delta_{kl}\vec{e}_l = \vec{e}_k = \delta_{kK}\vec{E}_K = \delta_{kK}\delta_{Kl}\vec{e}_l \quad \rightarrow \quad \delta_{kl} = \delta_{kK}\delta_{Kl}$$

Pro obecný vektor $\vec{\mathcal{V}}$ můžeme tedy psát:

$$\mathcal{V}_k = \vec{\mathcal{V}} \cdot \vec{e}_k = \vec{\mathcal{V}} \cdot (\delta_{kK}\vec{E}_K) = \delta_{kK}\mathcal{V}_K$$

$$\mathcal{V}_K = \vec{\mathcal{V}} \cdot \vec{E}_K = \vec{\mathcal{V}} \cdot (\delta_{Kk}\vec{e}_k) = \delta_{Kk}\mathcal{V}_k$$

Shrnutí

Deformační zobrazení: $\vec{x} = \vec{\chi}(\vec{X}, t)$

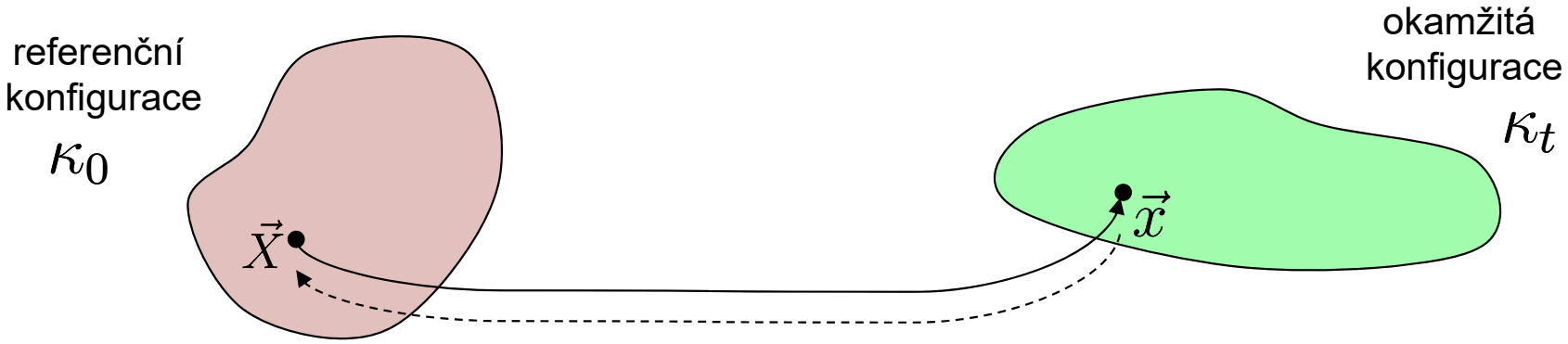
$$x_k = \chi_k(X_1, X_2, X_3, t), \;\; k = 1, 2, 3$$



Shrnutí

Deformační zobrazení: $\vec{x} = \vec{\chi}(\vec{X}, t)$

$$x_k = \chi_k(X_1, X_2, X_3, t), \;\; k = 1, 2, 3$$



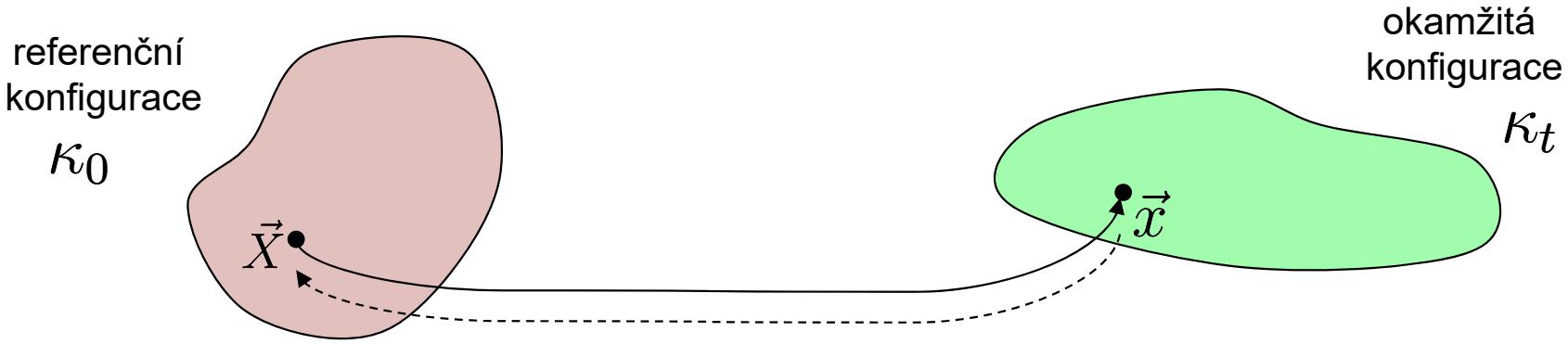
Inverzní deformační zobrazení: $\vec{X} = \vec{\chi}^{-1}(\vec{x}, t)$

$$X_K = \chi_K^{-1}(x_1, x_2, x_3, t), \;\; K = 1, 2, 3$$

Shrnutí

Deformační zobrazení: $\vec{x} = \vec{\chi}(\vec{X}, t)$

$$x_k = \chi_k(X_1, X_2, X_3, t), \;\; k = 1, 2, 3$$

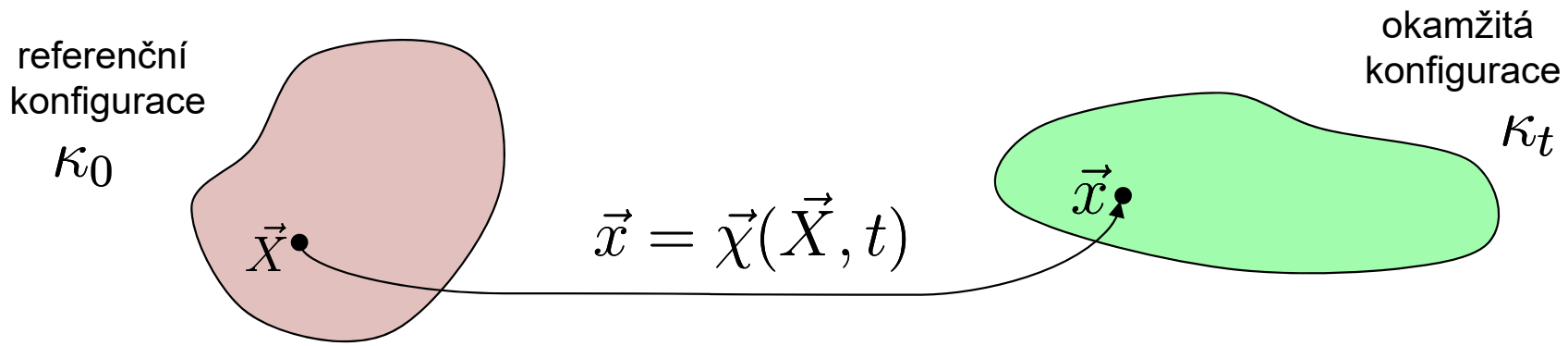


Inverzní deformační zobrazení: $\vec{X} = \vec{\chi}^{-1}(\vec{x}, t)$

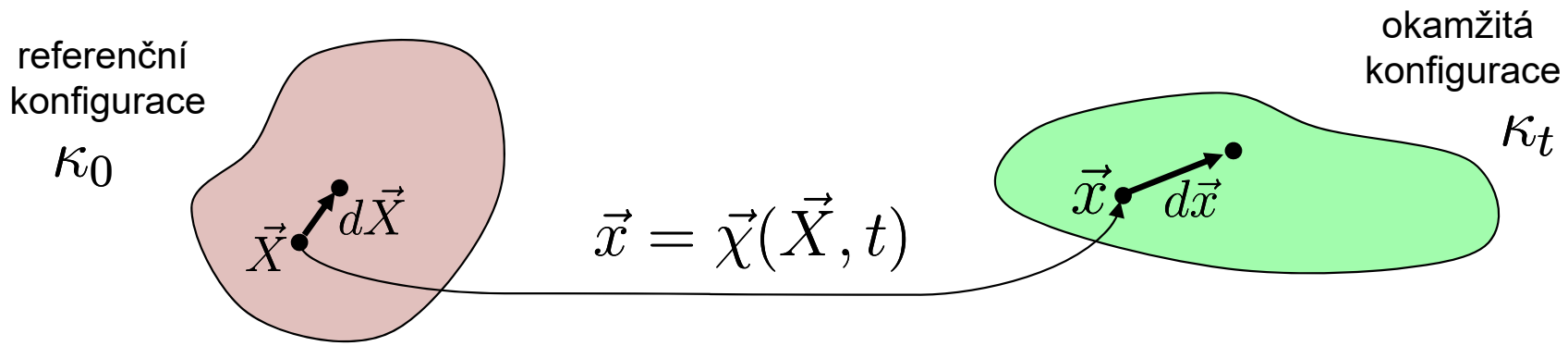
$$X_K = \chi_K^{-1}(x_1, x_2, x_3, t), \;\; K = 1, 2, 3$$

Axiom kontinuity: $J(\vec{X}, t) := \det \underbrace{\left(\frac{\partial \chi_k}{\partial X_K} \right)}_{\mathbf{F}} = \det \mathbf{F} \neq 0$

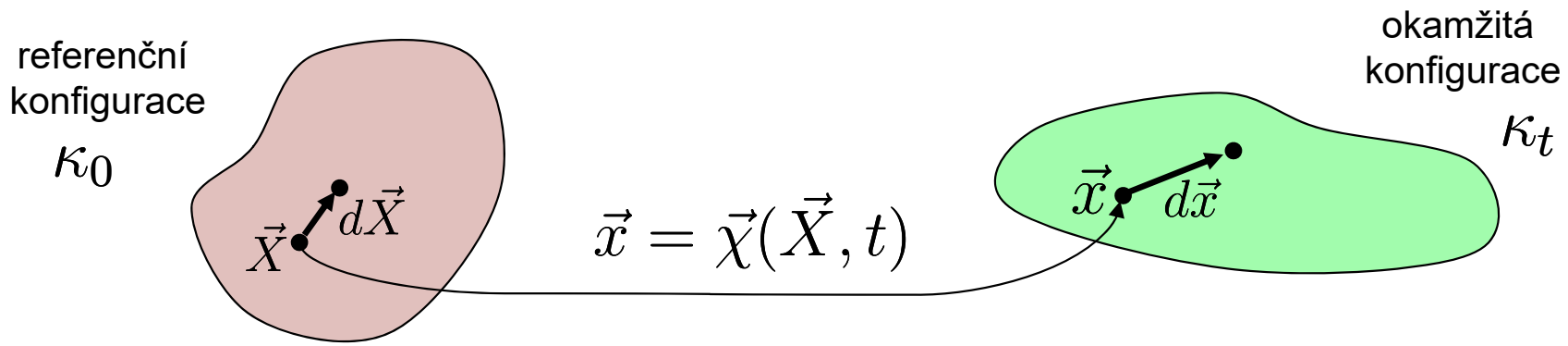
Deformační gradient



Deformační gradient

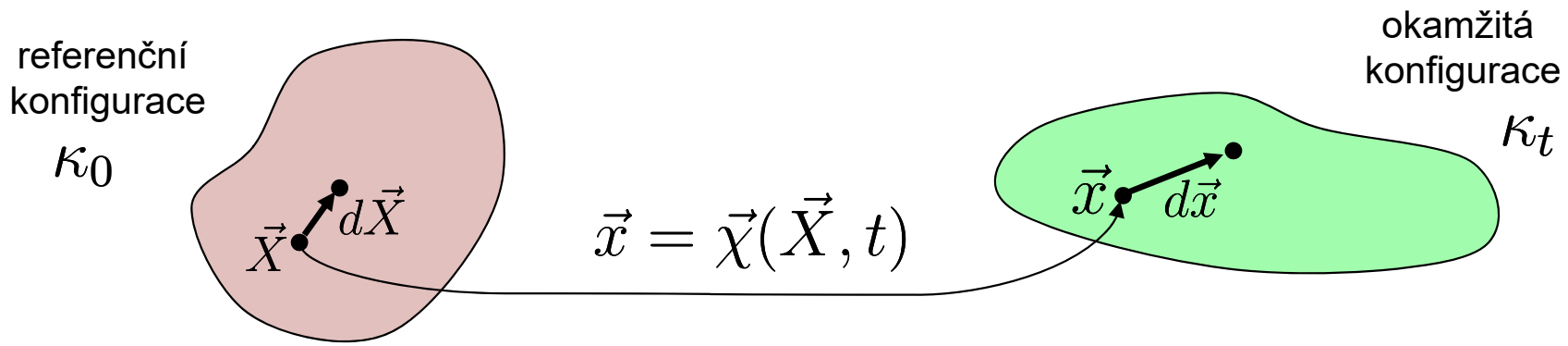


Deformační gradient



$$dx_k = \frac{\partial \chi_k}{\partial X_K} dX_K = \chi_{k,K} dX_K = F_{kK} dX_K$$

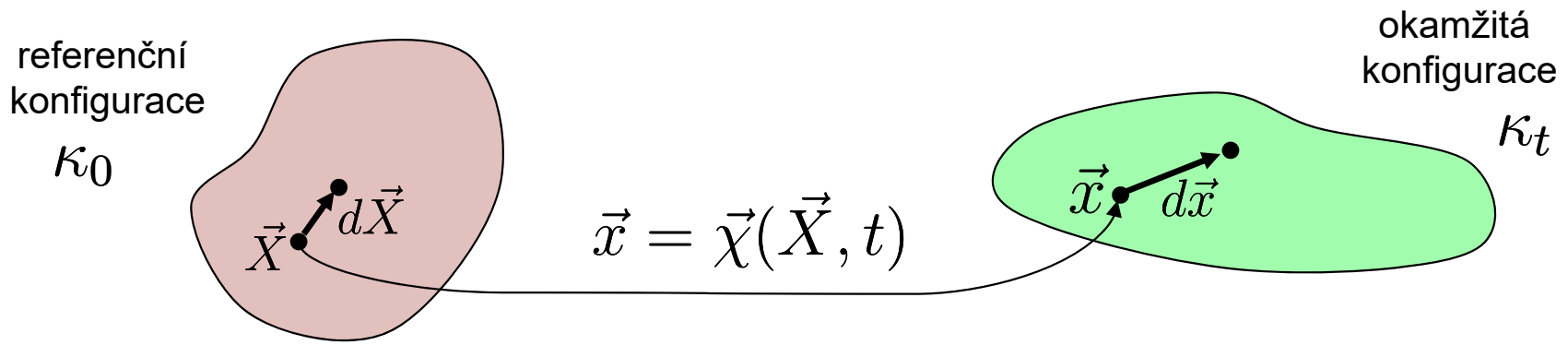
Deformační gradient



$$dx_k = \frac{\partial \chi_k}{\partial X_K} dX_K = \chi_{k,K} dX_K = F_{kK} dX_K$$

$$d\vec{x} = \mathbf{F} \cdot d\vec{X}$$

Deformační gradient



$$dx_k = \frac{\partial \chi_k}{\partial X_K} dX_K = \chi_{k,K} dX_K = F_{kK} dX_K$$

$$d\vec{x} = \mathbf{F} \cdot d\vec{X}$$

$$\mathbf{F}(\vec{X}, t) = \chi_{k,K}(\vec{X}, t)(\vec{e}_k \otimes \vec{E}_K) = (\mathrm{Grad}\, \chi)^T$$

Vsuvka – gradient vektoru

Gradientu vektoru může být definován dvěma různými způsoby. Ve fyzice se většinou používá definice 1, zatímco v matematice se často používá definice 2. V této přednášce používáme definici 1.

Definice 1:

$$\mathrm{Grad}\vec{\chi} = \left(\vec{E}_K \frac{\partial}{\partial X_K}\right) \otimes (\chi_k \vec{e}_k) = \frac{\partial \chi_k}{\partial X_K} \vec{E}_K \otimes \vec{e}_k = \begin{pmatrix} \frac{\partial \chi_1}{\partial X_1} & \frac{\partial \chi_2}{\partial X_1} & \frac{\partial \chi_3}{\partial X_1} \\ \frac{\partial \chi_1}{\partial X_2} & \frac{\partial \chi_2}{\partial X_2} & \frac{\partial \chi_3}{\partial X_2} \\ \frac{\partial \chi_1}{\partial X_3} & \frac{\partial \chi_2}{\partial X_3} & \frac{\partial \chi_3}{\partial X_3} \end{pmatrix}$$

Definice 2:

$$\mathrm{Grad}\vec{\chi} = (\chi_k \vec{e}_k) \otimes \left(\vec{E}_K \frac{\partial}{\partial X_K}\right) = \frac{\partial \chi_k}{\partial X_K} \vec{e}_k \otimes \vec{E}_K = \begin{pmatrix} \frac{\partial \chi_1}{\partial X_1} & \frac{\partial \chi_1}{\partial X_2} & \frac{\partial \chi_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial \chi_2}{\partial X_1} & \frac{\partial \chi_2}{\partial X_2} & \frac{\partial \chi_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial \chi_3}{\partial X_1} & \frac{\partial \chi_3}{\partial X_2} & \frac{\partial \chi_3}{\partial X_3} \end{pmatrix}$$

Vsuvka – gradient vektoru

Gradientu vektoru může být definován dvěma různými způsoby. Ve fyzice se většinou používá definice 1, zatímco v matematice se často používá definice 2. V této přednášce používáme definici 1.

Definice 1:

$$\mathrm{Grad}\vec{\chi} = \left(\vec{E}_K \frac{\partial}{\partial X_K}\right) \otimes (\chi_k \vec{e}_k) = \frac{\partial \chi_k}{\partial X_K} \vec{E}_K \otimes \vec{e}_k = \begin{pmatrix} \frac{\partial \chi_1}{\partial X_1} & \frac{\partial \chi_2}{\partial X_1} & \frac{\partial \chi_3}{\partial X_1} \\ \frac{\partial \chi_1}{\partial X_2} & \frac{\partial \chi_2}{\partial X_2} & \frac{\partial \chi_3}{\partial X_2} \\ \frac{\partial \chi_1}{\partial X_3} & \frac{\partial \chi_2}{\partial X_3} & \frac{\partial \chi_3}{\partial X_3} \end{pmatrix}$$

Definice 2:

$$\mathrm{Grad}\vec{\chi} = (\chi_k \vec{e}_k) \otimes \left(\vec{E}_K \frac{\partial}{\partial X_K}\right) = \frac{\partial \chi_k}{\partial X_K} \vec{e}_k \otimes \vec{E}_K = \begin{pmatrix} \frac{\partial \chi_1}{\partial X_1} & \frac{\partial \chi_1}{\partial X_2} & \frac{\partial \chi_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial \chi_2}{\partial X_1} & \frac{\partial \chi_2}{\partial X_2} & \frac{\partial \chi_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial \chi_3}{\partial X_1} & \frac{\partial \chi_3}{\partial X_2} & \frac{\partial \chi_3}{\partial X_3} \end{pmatrix}$$

Deformační gradient - shrnutí

$$x_k = \chi_k(X_1, X_2, X_3), \quad k = 1, 2, 3$$
$$X_K = \chi_K^{-1}(x_1, x_2, x_3), \quad K = 1, 2, 3$$

Matematická podmínka, která garantuje existenci jednoznačné inverzní funkce:

$$J(\vec{X}, t) := \det\left(\frac{\partial \chi_k}{\partial X_K}\right) \neq 0$$

Infinitesimální vektory $d\vec{x}, d\vec{X}$

$$dx_k = \frac{\partial \chi_k}{\underbrace{\partial X_K}_{\chi_{k,K}}} dX_K = \chi_{k,K} dX_K$$

$$dX_K = \frac{\partial \chi_K^{-1}}{\underbrace{\partial x_k}_{\chi_{K,k}^{-1}}} dx_k = \chi_{K,k}^{-1} dx_k$$

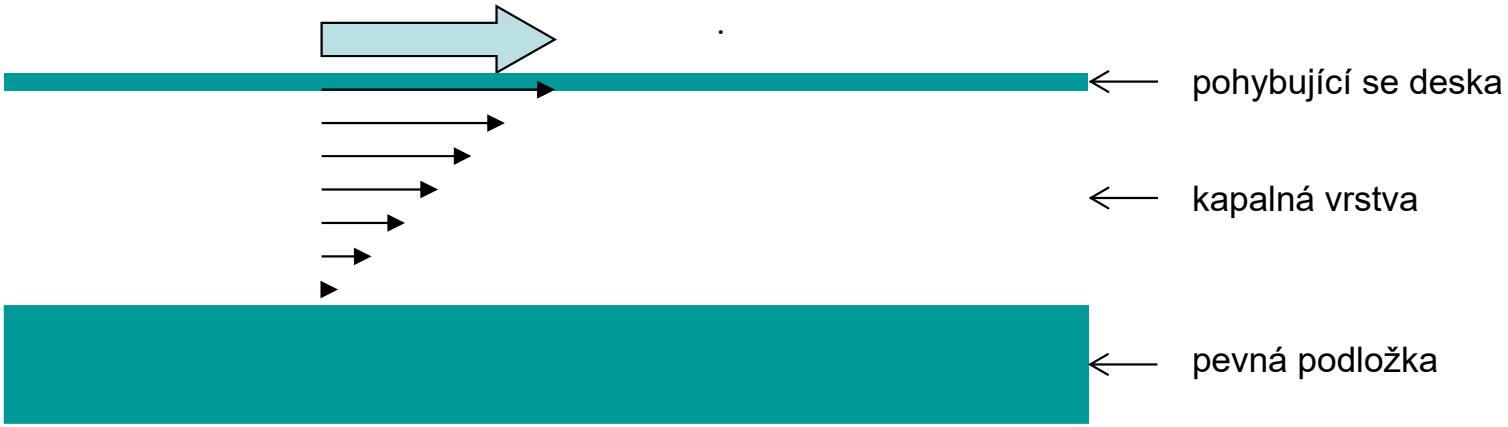
(Materiálový) deformační gradient

$$\mathbf{F}(\vec{X}, t) := \chi_{k,K}(\vec{X}, t)(\vec{e}_k \otimes \vec{E}_K)$$
$$d\vec{x} = \mathbf{F} \cdot d\vec{X}$$
$$\mathbf{F} = (\mathrm{Grad}\vec{\chi})^T$$

Prostorový deformační gradient

$$\mathbf{F}^{-1}(\vec{x}, t) := \chi_{K,k}^{-1}(\vec{x}, t)(\vec{E}_K \otimes \vec{e}_k)$$
$$d\vec{X} = \mathbf{F}^{-1} \cdot d\vec{x}$$
$$\mathbf{F}^{-1} = (\mathrm{grad}\vec{\chi}^{-1})^T$$

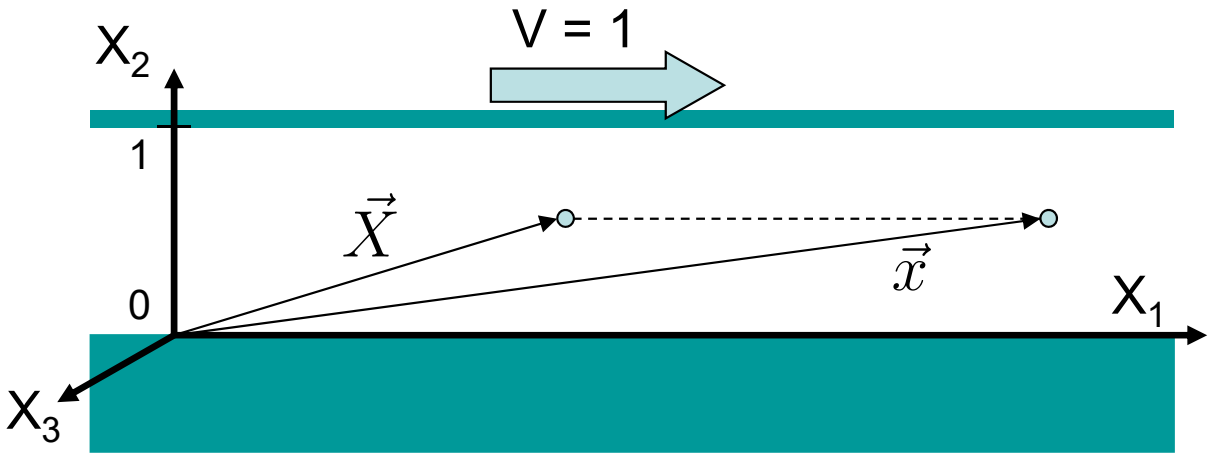
Příklad: simple shear (jednoduchý smyk)



Příklad: simple shear (jednoduchý smyk)

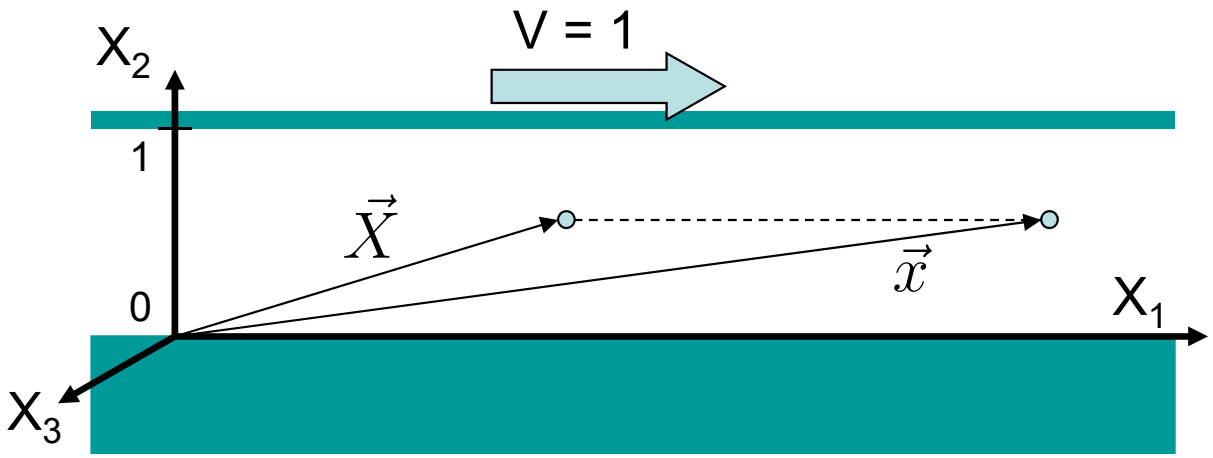


OOOF: $\vec{E}_1 = \vec{e}_1\,,\ \vec{E}_2 = \vec{e}_2\,,\ \vec{E}_3 = \vec{e}_3$



Chceme určit zobrazení $\vec{\chi}(\vec{X}, t)$, tj. vyjádřit složky x_1, x_2, x_3 pomocí složek X_1, X_2, X_3 .

Příklad: simple shear (jednoduchý smyk)



deformační zobrazení

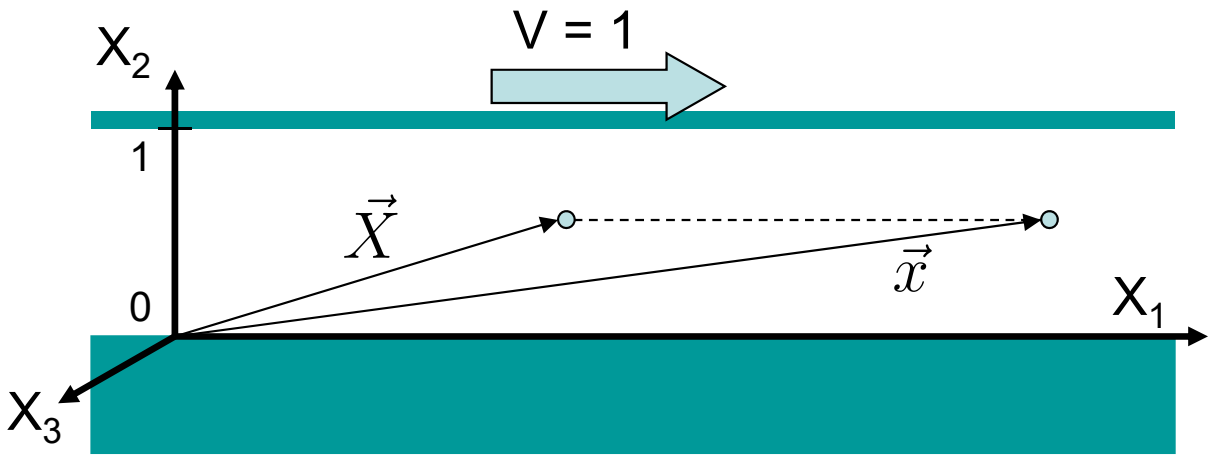
$$\vec{x} = \vec{\chi}(\vec{X}, t)$$

$$x_1 = X_1 + X_2 t$$

$$x_2 = X_2$$

$$x_3 = X_3$$

Příklad: simple shear (jednoduchý smyk)



deformační zobrazení

$$\vec{x} = \vec{\chi}(\vec{X}, t)$$

$$x_1 = X_1 + X_2 t$$
$$x_2 = X_2$$
$$x_3 = X_3$$

inverzní zobrazení

$$\vec{X} = \vec{\chi}^{-1}(\vec{x}, t)$$

$$X_1 = x_1 - x_2 t$$
$$X_2 = x_2$$
$$X_3 = x_3$$

Materiálový deformační gradient $\mathbf{F} = (\mathrm{Grad}\ \vec{\chi})^T$

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= X_1 + X_2 t \\ x_2 &= X_2 \\ x_3 &= X_3 \end{aligned}\right\} \quad \vec{x} = \vec{\chi}(\vec{X}, t)$$

Materiálový deformační gradient $\mathbf{F} = (\mathrm{Grad}\ \vec{\chi})^T$

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= X_1 + X_2 t \\ x_2 &= X_2 \\ x_3 &= X_3 \end{aligned}\right\} \quad \vec{x} = \vec{\chi}(\vec{X}, t)$$

$$\mathrm{Grad}\vec{\chi} = \left(\vec{E}_K \frac{\partial}{\partial X_K}\right) \otimes (\chi_k \vec{e}_k) = \frac{\partial \chi_k}{\partial X_K} \vec{E}_K \otimes \vec{e}_k = \begin{pmatrix} \frac{\partial \chi_1}{\partial X_1} & \frac{\partial \chi_2}{\partial X_1} & \frac{\partial \chi_3}{\partial X_1} \\ \frac{\partial \chi_1}{\partial X_2} & \frac{\partial \chi_2}{\partial X_2} & \frac{\partial \chi_3}{\partial X_2} \\ \frac{\partial \chi_1}{\partial X_3} & \frac{\partial \chi_2}{\partial X_3} & \frac{\partial \chi_3}{\partial X_3} \end{pmatrix}$$

Materiálový deformační gradient $\mathbf{F} = (\mathrm{Grad}\ \vec{\chi})^T$

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= X_1 + X_2 t \\ x_2 &= X_2 \\ x_3 &= X_3 \end{aligned}\right\} \quad \vec{x} = \vec{\chi}(\vec{X}, t)$$

$$\mathrm{Grad}\vec{\chi} = \left(\vec{E}_K \frac{\partial}{\partial X_K}\right) \otimes (\chi_k \vec{e}_k) = \frac{\partial \chi_k}{\partial X_K} \vec{E}_K \otimes \vec{e}_k = \begin{pmatrix} \frac{\partial \chi_1}{\partial X_1} & \frac{\partial \chi_2}{\partial X_1} & \frac{\partial \chi_3}{\partial X_1} \\ \frac{\partial \chi_1}{\partial X_2} & \frac{\partial \chi_2}{\partial X_2} & \frac{\partial \chi_3}{\partial X_2} \\ \frac{\partial \chi_1}{\partial X_3} & \frac{\partial \chi_2}{\partial X_3} & \frac{\partial \chi_3}{\partial X_3} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{F} = (\mathrm{Grad}\vec{\chi})^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial \chi_1}{\partial X_1} & \frac{\partial \chi_1}{\partial X_2} & \frac{\partial \chi_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial \chi_2}{\partial X_1} & \frac{\partial \chi_2}{\partial X_2} & \frac{\partial \chi_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial \chi_3}{\partial X_1} & \frac{\partial \chi_3}{\partial X_2} & \frac{\partial \chi_3}{\partial X_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Materiálový deformační gradient $\mathbf{F} = (\mathrm{Grad}\ \vec{\chi})^T$

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= X_1 + X_2 t \\ x_2 &= X_2 \\ x_3 &= X_3 \end{aligned}\right\} \quad \vec{x} = \vec{\chi}(\vec{X}, t)$$

$$\mathrm{Grad}\vec{\chi} = \left(\vec{E}_K \frac{\partial}{\partial X_K}\right) \otimes (\chi_k \vec{e}_k) = \frac{\partial \chi_k}{\partial X_K} \vec{E}_K \otimes \vec{e}_k = \begin{pmatrix} \frac{\partial \chi_1}{\partial X_1} & \frac{\partial \chi_2}{\partial X_1} & \frac{\partial \chi_3}{\partial X_1} \\ \frac{\partial \chi_1}{\partial X_2} & \frac{\partial \chi_2}{\partial X_2} & \frac{\partial \chi_3}{\partial X_2} \\ \frac{\partial \chi_1}{\partial X_3} & \frac{\partial \chi_2}{\partial X_3} & \frac{\partial \chi_3}{\partial X_3} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{F} = (\mathrm{Grad}\vec{\chi})^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial \chi_1}{\partial X_1} & \frac{\partial \chi_1}{\partial X_2} & \frac{\partial \chi_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial \chi_2}{\partial X_1} & \frac{\partial \chi_2}{\partial X_2} & \frac{\partial \chi_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial \chi_3}{\partial X_1} & \frac{\partial \chi_3}{\partial X_2} & \frac{\partial \chi_3}{\partial X_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det \mathbf{F} = 1$$

Materiálový deformační gradient $\mathbf{F} = (\mathrm{Grad}\ \vec{\chi})^T$

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= X_1 + X_2 t \\ x_2 &= X_2 \\ x_3 &= X_3 \end{aligned}\right\} \quad \vec{x} = \vec{\chi}(\vec{X}, t)$$

$$\mathrm{Grad}\vec{\chi} = \left(\vec{E}_K \frac{\partial}{\partial X_K}\right) \otimes (\chi_k \vec{e}_k) = \frac{\partial \chi_k}{\partial X_K} \vec{E}_K \otimes \vec{e}_k = \begin{pmatrix} \frac{\partial \chi_1}{\partial X_1} & \frac{\partial \chi_2}{\partial X_1} & \frac{\partial \chi_3}{\partial X_1} \\ \frac{\partial \chi_1}{\partial X_2} & \frac{\partial \chi_2}{\partial X_2} & \frac{\partial \chi_3}{\partial X_2} \\ \frac{\partial \chi_1}{\partial X_3} & \frac{\partial \chi_2}{\partial X_3} & \frac{\partial \chi_3}{\partial X_3} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{F} = (\mathrm{Grad}\vec{\chi})^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial \chi_1}{\partial X_1} & \frac{\partial \chi_1}{\partial X_2} & \frac{\partial \chi_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial \chi_2}{\partial X_1} & \frac{\partial \chi_2}{\partial X_2} & \frac{\partial \chi_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial \chi_3}{\partial X_1} & \frac{\partial \chi_3}{\partial X_2} & \frac{\partial \chi_3}{\partial X_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det \mathbf{F} = 1$$

$$d\vec{x} = \mathbf{F} \cdot d\vec{X}$$

Materiálový deformační gradient $\mathbf{F} = (\mathrm{Grad}\ \vec{\chi})^T$

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= X_1 + X_2 t \\ x_2 &= X_2 \\ x_3 &= X_3 \end{aligned}\right\} \quad \vec{x} = \vec{\chi}(\vec{X}, t)$$

$$\mathrm{Grad}\vec{\chi} = \left(\vec{E}_K \frac{\partial}{\partial X_K}\right) \otimes (\chi_k \vec{e}_k) = \frac{\partial \chi_k}{\partial X_K} \vec{E}_K \otimes \vec{e}_k = \begin{pmatrix} \frac{\partial \chi_1}{\partial X_1} & \frac{\partial \chi_2}{\partial X_1} & \frac{\partial \chi_3}{\partial X_1} \\ \frac{\partial \chi_1}{\partial X_2} & \frac{\partial \chi_2}{\partial X_2} & \frac{\partial \chi_3}{\partial X_2} \\ \frac{\partial \chi_1}{\partial X_3} & \frac{\partial \chi_2}{\partial X_3} & \frac{\partial \chi_3}{\partial X_3} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{F} = (\mathrm{Grad}\vec{\chi})^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial \chi_1}{\partial X_1} & \frac{\partial \chi_1}{\partial X_2} & \frac{\partial \chi_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial \chi_2}{\partial X_1} & \frac{\partial \chi_2}{\partial X_2} & \frac{\partial \chi_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial \chi_3}{\partial X_1} & \frac{\partial \chi_3}{\partial X_2} & \frac{\partial \chi_3}{\partial X_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det \mathbf{F} = 1$$

$$d\vec{x} = \mathbf{F} \cdot d\vec{X}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

→ → →

Horizontální vektor ve směru X_1 se při pohybu nemění.

Materiálový deformační gradient $\mathbf{F} = (\mathrm{Grad}\ \vec{\chi})^T$

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= X_1 + X_2 t \\ x_2 &= X_2 \\ x_3 &= X_3 \end{aligned}\right\} \quad \vec{x} = \vec{\chi}(\vec{X}, t)$$

$$\mathrm{Grad}\vec{\chi} = \left(\vec{E}_K \frac{\partial}{\partial X_K}\right) \otimes (\chi_k \vec{e}_k) = \frac{\partial \chi_k}{\partial X_K} \vec{E}_K \otimes \vec{e}_k = \begin{pmatrix} \frac{\partial \chi_1}{\partial X_1} & \frac{\partial \chi_2}{\partial X_1} & \frac{\partial \chi_3}{\partial X_1} \\ \frac{\partial \chi_1}{\partial X_2} & \frac{\partial \chi_2}{\partial X_2} & \frac{\partial \chi_3}{\partial X_2} \\ \frac{\partial \chi_1}{\partial X_3} & \frac{\partial \chi_2}{\partial X_3} & \frac{\partial \chi_3}{\partial X_3} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{F} = (\mathrm{Grad}\vec{\chi})^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial \chi_1}{\partial X_1} & \frac{\partial \chi_1}{\partial X_2} & \frac{\partial \chi_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial \chi_2}{\partial X_1} & \frac{\partial \chi_2}{\partial X_2} & \frac{\partial \chi_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial \chi_3}{\partial X_1} & \frac{\partial \chi_3}{\partial X_2} & \frac{\partial \chi_3}{\partial X_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det \mathbf{F} = 1$$

$$d\vec{x} = \mathbf{F} \cdot d\vec{X}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$



Horizontální vektor ve směru X_1 se při pohybu nemění.



Na počátku vertikální vektor se při pohybu postupně uklání a prodlužuje.

Materiálový deformační gradient $\mathbf{F} = (\mathrm{Grad}\ \vec{\chi})^T$

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= X_1 + X_2 t \\ x_2 &= X_2 \\ x_3 &= X_3 \end{aligned}\right\} \quad \vec{x} = \vec{\chi}(\vec{X}, t)$$

$$\mathrm{Grad}\vec{\chi} = \left(\vec{E}_K \frac{\partial}{\partial X_K}\right) \otimes (\chi_k \vec{e}_k) = \frac{\partial \chi_k}{\partial X_K} \vec{E}_K \otimes \vec{e}_k = \begin{pmatrix} \frac{\partial \chi_1}{\partial X_1} & \frac{\partial \chi_2}{\partial X_1} & \frac{\partial \chi_3}{\partial X_1} \\ \frac{\partial \chi_1}{\partial X_2} & \frac{\partial \chi_2}{\partial X_2} & \frac{\partial \chi_3}{\partial X_2} \\ \frac{\partial \chi_1}{\partial X_3} & \frac{\partial \chi_2}{\partial X_3} & \frac{\partial \chi_3}{\partial X_3} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{F} = (\mathrm{Grad}\vec{\chi})^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial \chi_1}{\partial X_1} & \frac{\partial \chi_1}{\partial X_2} & \frac{\partial \chi_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial \chi_2}{\partial X_1} & \frac{\partial \chi_2}{\partial X_2} & \frac{\partial \chi_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial \chi_3}{\partial X_1} & \frac{\partial \chi_3}{\partial X_2} & \frac{\partial \chi_3}{\partial X_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det \mathbf{F} = 1$$

$$d\vec{x} = \mathbf{F} \cdot d\vec{X}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Horizontální vektor ve směru X_1 se při pohybu nemění.



Na počátku vertikální vektor se při pohybu postupně uklání a prodlužuje.



Horizontální vektor ve směru X_3 se při pohybu nemění.

Prostorový deformační gradient $\mathbf{F}^{-1} = (\mathrm{grad}\ \vec{\chi}^{-1})^T$

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= x_1 - x_2 t \\ X_2 &= x_2 \\ X_3 &= x_3 \end{aligned}\right\} \vec{X} = \vec{\chi}^{-1}(\vec{x}, t)$$

$$\mathbf{F}^{-1} = (\mathrm{grad}\vec{\chi}^{-1})^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} & \frac{\partial X_1}{\partial x_2} & \frac{\partial X_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial X_2}{\partial x_1} & \frac{\partial X_2}{\partial x_2} & \frac{\partial X_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial X_3}{\partial x_1} & \frac{\partial X_3}{\partial x_2} & \frac{\partial X_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det \mathbf{F}^{-1} = 1$$

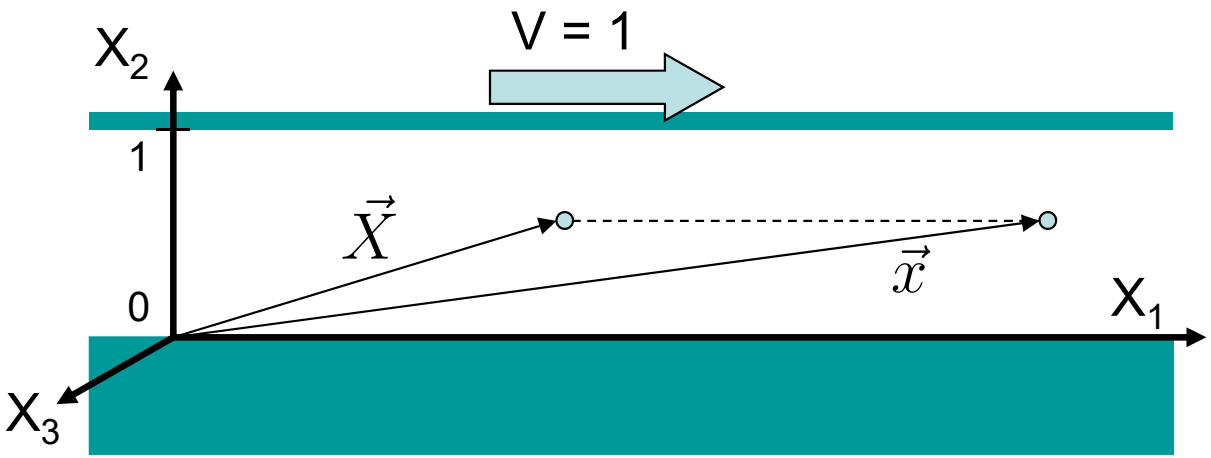
$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -t+t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I}$$

Greenův deformační tenzor (použijeme zanedlouho):

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ t & t^2+1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

symetrická pozitivně definitní matice

Úlohu jsme řešili pro případ, kdy souřadné soustavy $\{\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3\}$ a $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ jsou totožné:

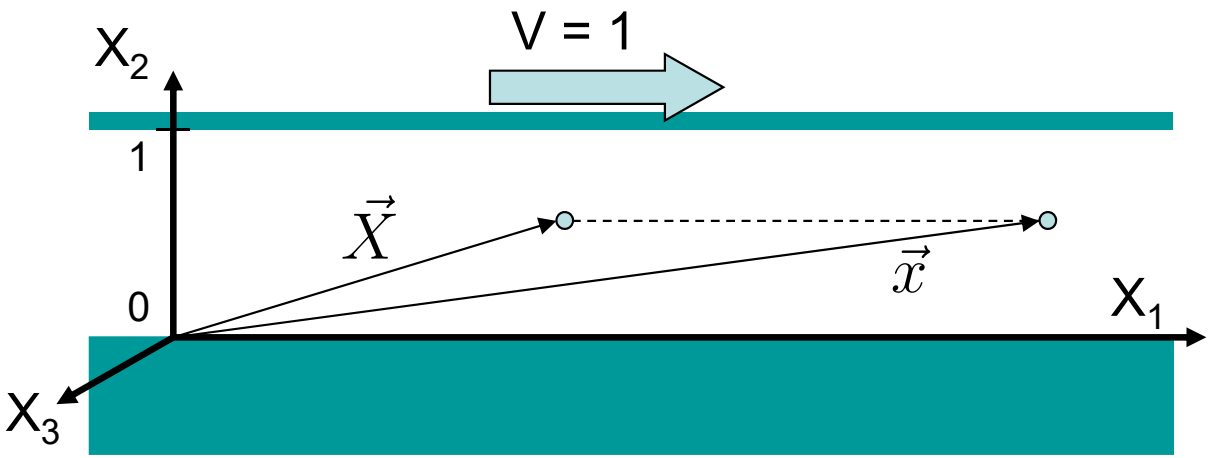


$$x_1 = X_1 + X_2 t$$

$$x_2 = X_2$$

$$x_3 = X_3$$

Úlohu jsme řešili pro případ, kdy souřadné soustavy $\{\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3\}$ a $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ jsou totožné:

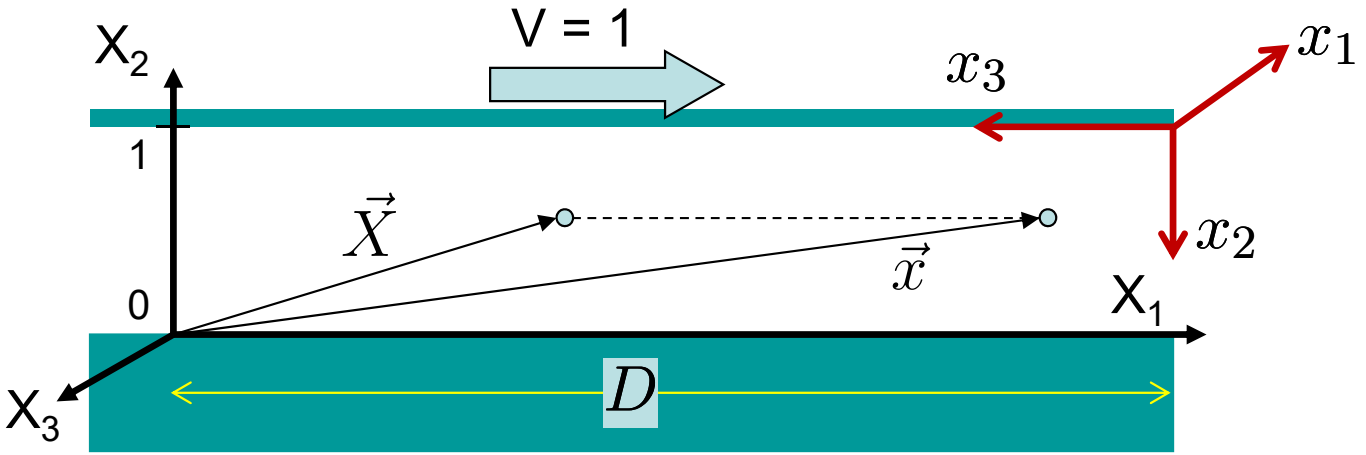


$$x_1 = X_1 + X_2 t$$

$$x_2 = X_2$$

$$x_3 = X_3$$

Pokud bychom použili 2 různé souřadné soustavy, bude se postupovat analogicky...



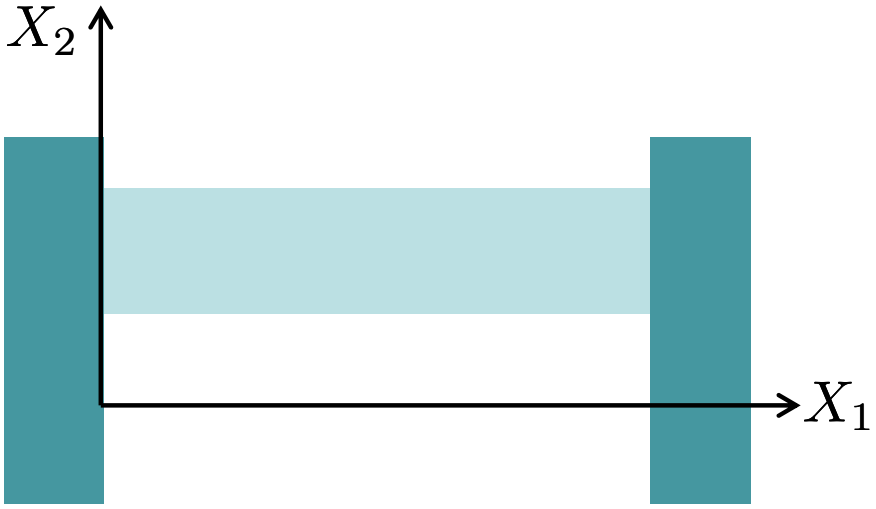
$$x_1 = -X_3$$

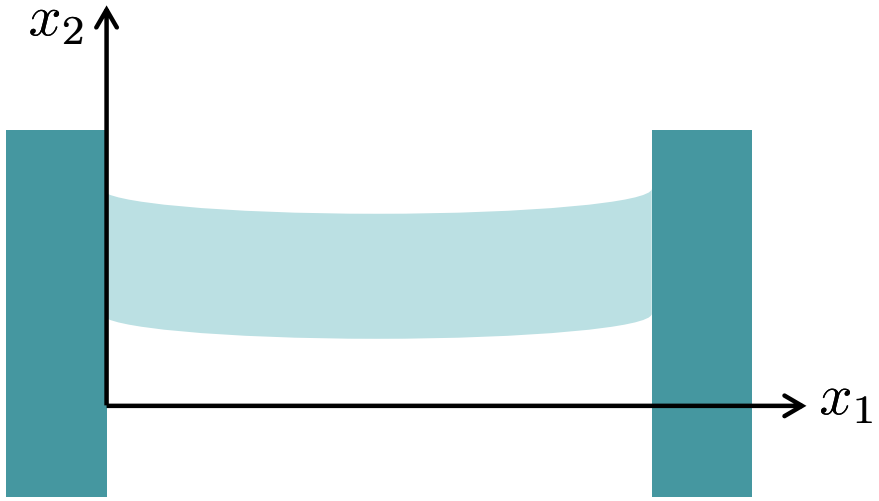
$$x_2 = 1 - X_2$$

$$x_3 = D - X_1 - X_2 t$$

Diferenciální operátory v okamžité a referenční konfiguraci

Diferenciální operátory v okamžité a referenční konfiguraci





$$\mathbf{F}^{-T} : \mathrm{Grad}\,\mathbf{T} + \varrho_0 \det \mathbf{F}^{-1}\vec{g} = 0$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{t} + \rho\vec{g} = 0$$

Vztah mezi $\mathrm{Grad}\,\vec{V}$ a $\mathrm{grad}\,\vec{v}$

$$\mathrm{Grad}\ \vec{V} = \vec{E}_K \otimes \frac{\partial \vec{V}}{\partial X_K}$$

Vztah mezi $\mathrm{Grad}\,\vec{V}$ a $\mathrm{grad}\,\vec{v}$

$$\mathrm{Grad}\ \vec{V} = \vec{E}_K \otimes \frac{\partial \vec{V}}{\partial X_K} = \vec{E}_K \otimes \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial X_K}$$

Vztah mezi $\mathrm{Grad}\,\vec{V}$ a $\mathrm{grad}\,\vec{v}$

$$\mathrm{Grad}\ \vec{V} = \vec{E}_K \otimes \frac{\partial \vec{V}}{\partial X_K} = \vec{E}_K \otimes \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial X_K} = \frac{\partial x_k}{\partial X_K}\vec{E}_K \otimes \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_k}$$

Vztah mezi $\mathrm{Grad}\,\vec{V}$ a $\mathrm{grad}\,\vec{v}$

$$\mathrm{Grad}\ \vec{V} = \vec{E}_K \otimes \frac{\partial \vec{V}}{\partial X_K} = \vec{E}_K \otimes \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial X_K} = \frac{\partial x_k}{\partial X_K}\vec{E}_K \otimes \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_k}$$

$\downarrow$

Definici deformačního zobrazení: $\mathbf{F} = \chi_{k,K}(\vec{e}_k \otimes \vec{E}_K) = \dfrac{\partial x_k}{\partial X_K}(\vec{e}_k \otimes \vec{E}_K)$

$\downarrow$

$$\mathbf{F}^T = \frac{\partial x_k}{\partial X_K}(\vec{E}_K \otimes \vec{e}_k) \rightarrow \mathbf{F}^T \cdot \vec{e}_k = \frac{\partial x_k}{\partial X_K}\vec{E}_K$$

Vztah mezi $\mathrm{Grad}\,\vec{V}$ a $\mathrm{grad}\,\vec{v}$

$$\mathrm{Grad}\ \vec{V} = \vec{E}_K \otimes \frac{\partial \vec{V}}{\partial X_K} = \vec{E}_K \otimes \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial X_K} = \frac{\partial x_k}{\partial X_K}\vec{E}_K \otimes \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_k} = \bigcirc$$

$$\downarrow$$

Definici deformačního zobrazení: $\mathbf{F} = \chi_{k,K}(\vec{e}_k \otimes \vec{E}_K) = \dfrac{\partial x_k}{\partial X_K}(\vec{e}_k \otimes \vec{E}_K)$

$$\downarrow$$

$$\mathbf{F}^T = \frac{\partial x_k}{\partial X_K}(\vec{E}_K \otimes \vec{e}_k) \rightarrow \mathbf{F}^T \cdot \vec{e}_k = \frac{\partial x_k}{\partial X_K}\vec{E}_K$$

$$\bigcirc = \frac{\partial x_k}{\partial X_K}\vec{E}_K \otimes \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_k}$$

Vztah mezi $\mathrm{Grad}\,\vec{V}$ a $\mathrm{grad}\,\vec{v}$

$$\mathrm{Grad}\ \vec{V} = \vec{E}_K \otimes \frac{\partial \vec{V}}{\partial X_K} = \vec{E}_K \otimes \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial X_K} = \frac{\partial x_k}{\partial X_K}\vec{E}_K \otimes \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_k} = \bigcirc$$

$\downarrow$

Definici deformačního zobrazení: $\mathbf{F} = \chi_{k,K}(\vec{e}_k \otimes \vec{E}_K) = \dfrac{\partial x_k}{\partial X_K}(\vec{e}_k \otimes \vec{E}_K)$

$\downarrow$

$$\mathbf{F}^T = \frac{\partial x_k}{\partial X_K}(\vec{E}_K \otimes \vec{e}_k) \rightarrow \mathbf{F}^T \cdot \vec{e}_k = \frac{\partial x_k}{\partial X_K}\vec{E}_K$$

$$\bigcirc = \frac{\partial x_k}{\partial X_K}\vec{E}_K \otimes \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_k} = \mathbf{F}^T \cdot \vec{e}_k \otimes \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_k}$$

Vztah mezi $\mathrm{Grad}\,\vec{V}$ a $\mathrm{grad}\,\vec{v}$

$$\mathrm{Grad}\ \vec{V} = \vec{E}_K \otimes \frac{\partial \vec{V}}{\partial X_K} = \vec{E}_K \otimes \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial X_K} = \frac{\partial x_k}{\partial X_K}\vec{E}_K \otimes \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_k} = \bigcirc$$

$\downarrow$

Definici deformačního zobrazení: $\mathbf{F} = \chi_{k,K}(\vec{e}_k \otimes \vec{E}_K) = \dfrac{\partial x_k}{\partial X_K}(\vec{e}_k \otimes \vec{E}_K)$

$\downarrow$

$$\mathbf{F}^T = \frac{\partial x_k}{\partial X_K}(\vec{E}_K \otimes \vec{e}_k) \rightarrow \mathbf{F}^T \cdot \vec{e}_k = \frac{\partial x_k}{\partial X_K}\vec{E}_K$$

$$\bigcirc = \frac{\partial x_k}{\partial X_K}\vec{E}_K \otimes \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_k} = \mathbf{F}^T \cdot \vec{e}_k \otimes \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_k} = \mathbf{F}^T \cdot \left(\vec{e}_k \otimes \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_k}\right)$$

Vztah mezi $\mathrm{Grad}\,\vec{V}$ a $\mathrm{grad}\,\vec{v}$

$$\mathrm{Grad}\ \vec{V} = \vec{E}_K \otimes \frac{\partial \vec{V}}{\partial X_K} = \vec{E}_K \otimes \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial X_K} = \frac{\partial x_k}{\partial X_K}\vec{E}_K \otimes \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_k} = \bigcirc$$

$\downarrow$

Definici deformačního zobrazení: $\mathbf{F} = \chi_{k,K}(\vec{e}_k \otimes \vec{E}_K) = \dfrac{\partial x_k}{\partial X_K}(\vec{e}_k \otimes \vec{E}_K)$

$\downarrow$

$$\mathbf{F}^T = \frac{\partial x_k}{\partial X_K}(\vec{E}_K \otimes \vec{e}_k) \rightarrow \mathbf{F}^T \cdot \vec{e}_k = \frac{\partial x_k}{\partial X_K}\vec{E}_K$$

$$\bigcirc = \frac{\partial x_k}{\partial X_K}\vec{E}_K \otimes \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_k} = \mathbf{F}^T \cdot \vec{e}_k \otimes \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_k} = \mathbf{F}^T \cdot \left(\vec{e}_k \otimes \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_k}\right)$$

$\downarrow$

Definice gradientu: $\mathrm{grad}\ \bullet = \vec{e}_k \otimes \dfrac{\partial \bullet}{\partial x_k}$

Vztah mezi $\mathrm{Grad}\,\vec{V}$ a $\mathrm{grad}\,\vec{v}$

$$\mathrm{Grad}\ \vec{V} = \vec{E}_K \otimes \frac{\partial \vec{V}}{\partial X_K} = \vec{E}_K \otimes \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial X_K} = \frac{\partial x_k}{\partial X_K}\vec{E}_K \otimes \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_k} = \bigcirc$$

$\downarrow$

Definici deformačního zobrazení: $\mathbf{F} = \chi_{k,K}(\vec{e}_k \otimes \vec{E}_K) = \dfrac{\partial x_k}{\partial X_K}(\vec{e}_k \otimes \vec{E}_K)$

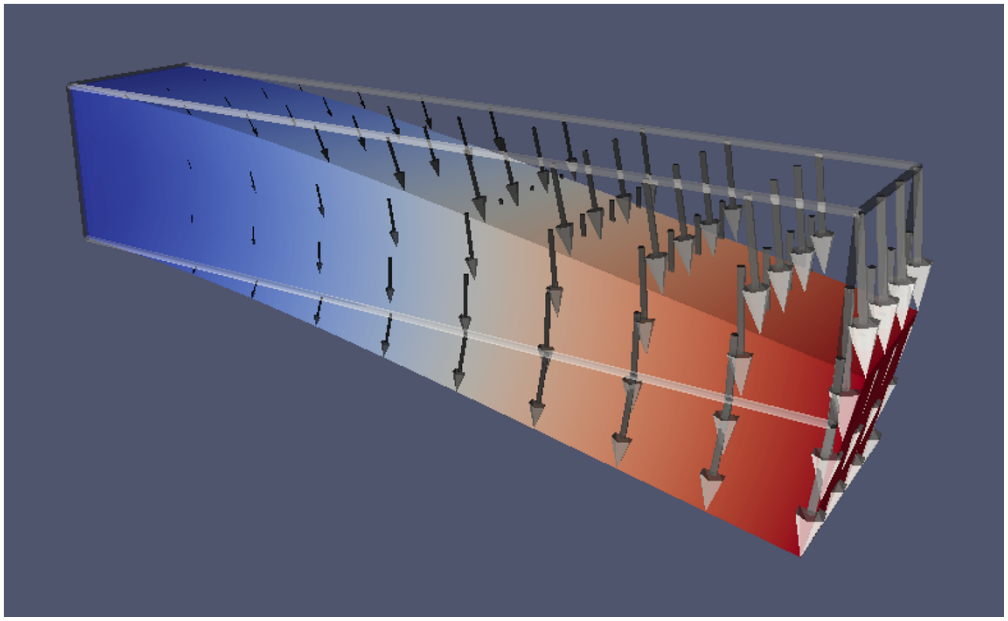
$\downarrow$

$$\mathbf{F}^T = \frac{\partial x_k}{\partial X_K}(\vec{E}_K \otimes \vec{e}_k) \rightarrow \mathbf{F}^T \cdot \vec{e}_k = \frac{\partial x_k}{\partial X_K}\vec{E}_K$$

$$\bigcirc = \frac{\partial x_k}{\partial X_K}\vec{E}_K \otimes \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_k} = \mathbf{F}^T \cdot \vec{e}_k \otimes \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_k} = \mathbf{F}^T \cdot \left(\vec{e}_k \otimes \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_k}\right) = \mathbf{F}^T \cdot \mathrm{grad}\ \vec{v}$$

$\downarrow$

Definice gradientu: $\mathrm{grad}\ \bullet = \vec{e}_k \otimes \dfrac{\partial \bullet}{\partial x_k}$



$$\operatorname{Grad} \vec{V} = \mathbf{F}^{\mathrm{T}} \cdot \operatorname{grad} \vec{v}$$

Skalární pole $\Theta(X) = \theta(x)$

$$\operatorname{Grad} \Theta \cdot \vec{s} = \vec{s} \cdot \operatorname{Grad} \Theta = \vec{s} \cdot \left(\mathbf{F}^{\mathrm{T}} \cdot \operatorname{grad} \theta \right) = (\mathbf{F} \cdot \vec{s}) \cdot \operatorname{grad} \theta = \operatorname{grad} \theta \cdot (\mathbf{F} \cdot \vec{s})$$

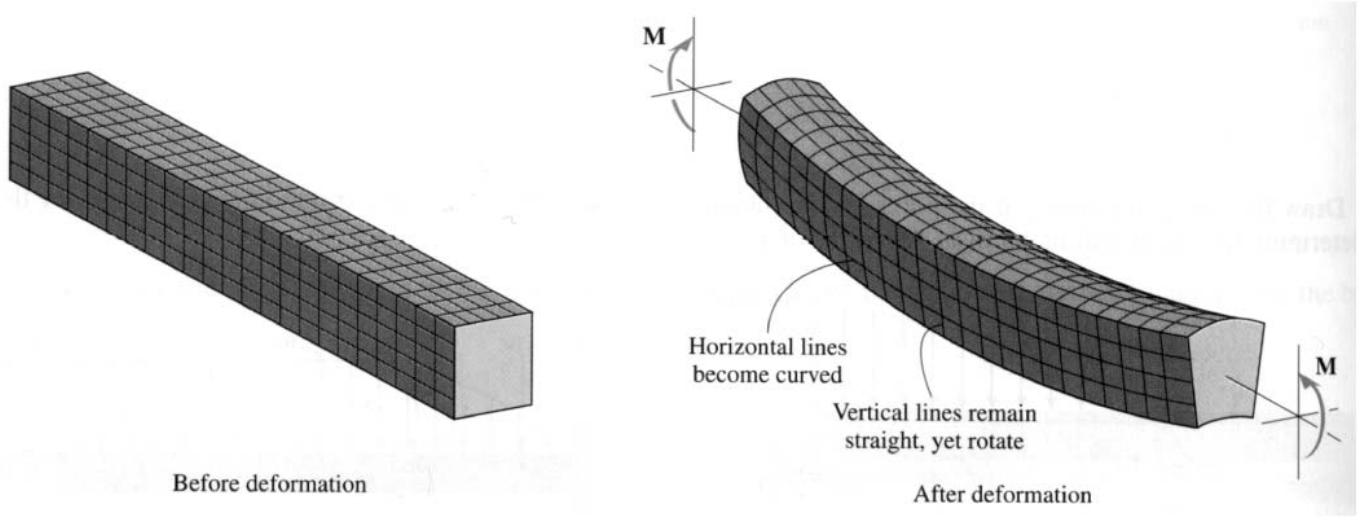


Figure 3.4 Initially straight beam and the deformed bent beam

Množiny stejných vektorů, „žijících“ na jiné doméně
Prostorovou diferenciaci lagrangeovských a eulerovských polí je nutno rozlišovat

$$\operatorname{Grad} \vec{V} = \mathbf{F}^{\mathrm{T}} \cdot \operatorname{grad} \vec{v}$$

Skalární pole $\Theta(X) = \theta(x)$

$$\operatorname{Grad} \Theta \cdot \vec{s} = \vec{s} \cdot \operatorname{Grad} \Theta = \vec{s} \cdot \left(\mathbf{F}^{\mathrm{T}} \cdot \operatorname{grad} \theta \right) = (\mathbf{F} \cdot \vec{s}) \cdot \operatorname{grad} \theta = \operatorname{grad} \theta \cdot (\mathbf{F} \cdot \vec{s})$$

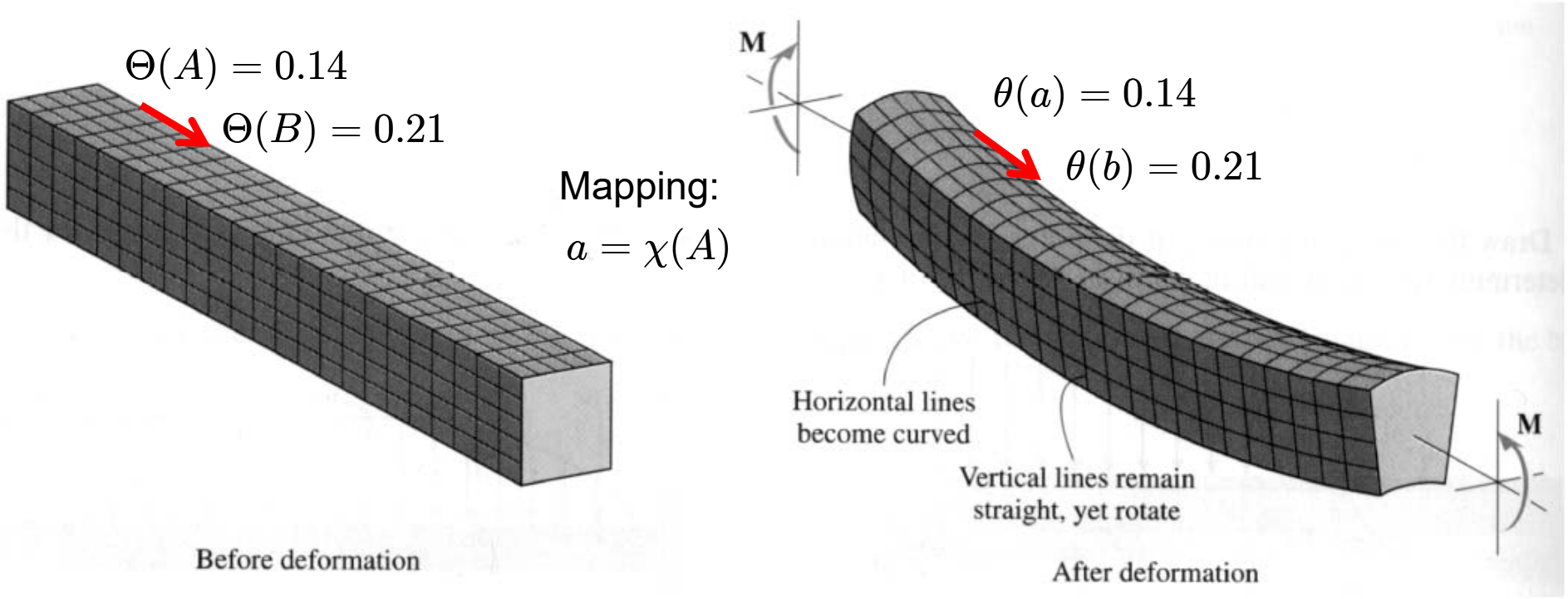


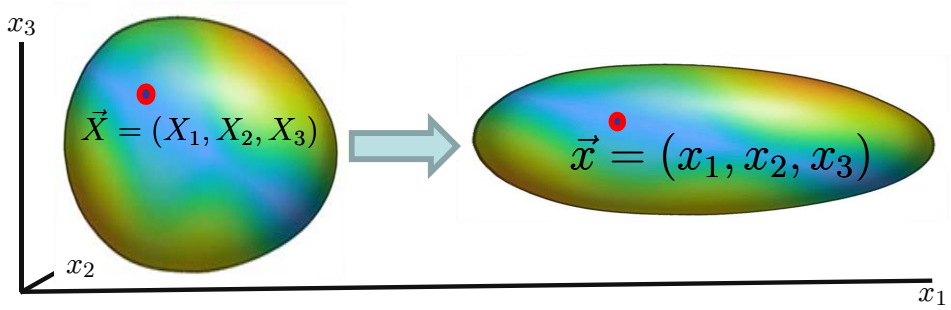
Figure 3.4 Initially straight beam and the deformed bent beam

Množiny stejných vektorů (soubor stejných hodnot), „žijících“ ale na jiné doméně
Prostorovou diferenciaci lagrangeovských a eulerovských polí je nutno rozlišovat

„První čtení“ kontinua (OOOF): $\vec{e}_i = \vec{E}_i$

Stále platí:

$$\mathrm{Grad}\,\vec{V} = \mathbf{F}^{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{grad}\,\vec{v}$$



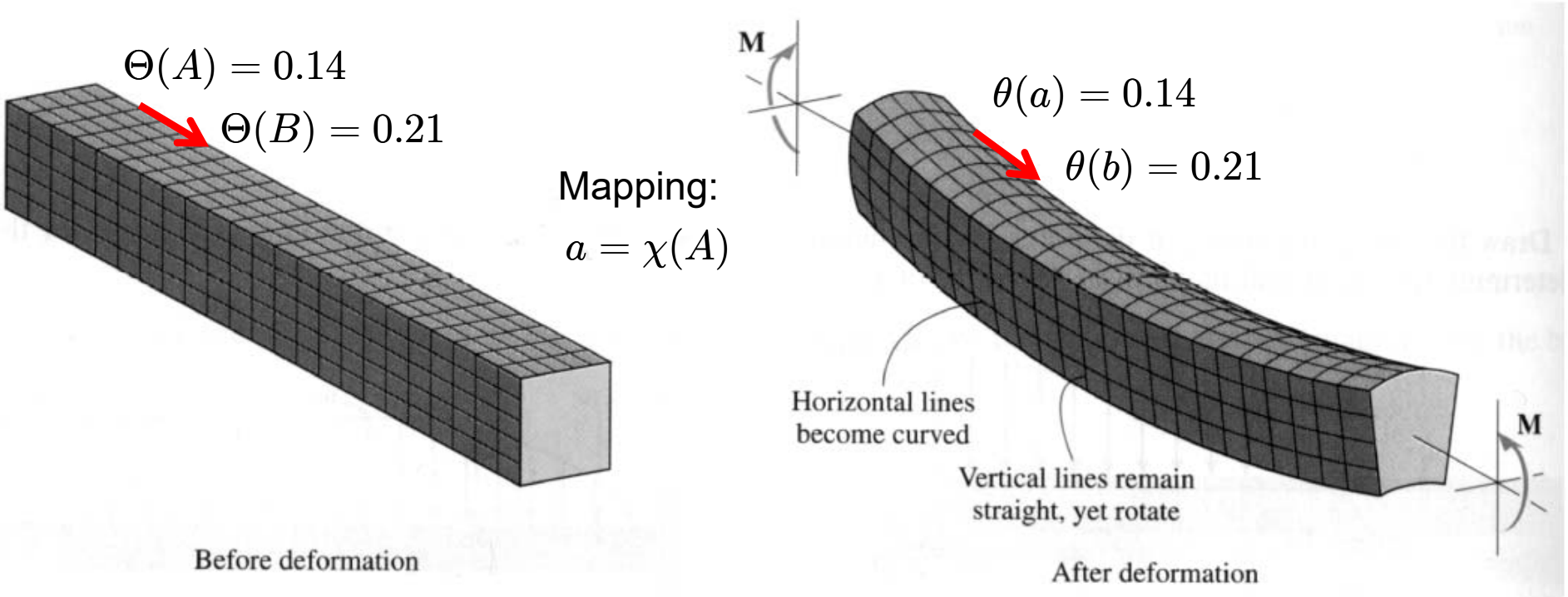


Figure 3.4 Initially straight beam and the deformed bent beam

Množiny stejných vektorů (soubor stejných hodnot), „žijících“ ale na jiné doméně
Prostorovou diferenciaci lagrangeovských a eulerovských polí je nutno rozlišovat