

$$\mathbf{l}(\vec{x}, t) := \text{grad}^T \vec{v}(\vec{x}, t), \quad \dot{\mathbf{F}} = \mathbf{l} \cdot \mathbf{F}$$

$$(1) \quad \mathbf{l} = \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1}$$

$$(2) \quad (\dot{\mathbf{F}}^{-1}) = -\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{l}$$

$$(3) \quad \dot{J} = J \text{div } \vec{v} = J \text{tr } \mathbf{l}$$

$$(4) \quad d\vec{x} = \mathbf{l} \cdot d\vec{x}$$

$$(5) \quad d\vec{a} = [(\text{div } \vec{v})\mathbf{I} - \mathbf{l}^T] \cdot d\vec{a}$$

$$(6) \quad dv = (\text{div } \vec{v}) dv$$

časová změna elementu délky

časová změna elementu plochy

časová změna elementu objemu

Odvození:

$$(2) : \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{I} \rightarrow (\mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{F}}^{-1}) = \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1} + \mathbf{F} \cdot (\dot{\mathbf{F}}^{-1}) = 0 \xrightarrow{\text{viz (1)}} \mathbf{l} + \mathbf{F} \cdot (\dot{\mathbf{F}}^{-1}) = 0 \rightarrow (\dot{\mathbf{F}}^{-1}) = -\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{l}$$

$$(3) : \dot{J} = \det \dot{\mathbf{F}} = \frac{\partial J}{\partial \chi_{k,K}} \dot{\chi}_{k,K} = \frac{\partial J}{\partial \chi_{k,K}} v_{k,l} \chi_{l,K}.$$

Nyní použijeme $\frac{\partial J}{\partial \chi_{k,K}} = J \chi_{K,k}^{-1}$, viz přednáška 02 :

$$\frac{\partial J}{\partial \chi_{k,K}} v_{k,l} \chi_{l,K} = J \underbrace{\chi_{K,k}^{-1} \chi_{l,K}}_{\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{I}} v_{k,l} = J \delta_{kl} v_{k,l} = J v_{k,k} = J \text{div } \vec{v} = J \text{tr } \mathbf{l}$$

Odvoďte materiálovou derivaci vektoru

$$\vec{n} = \frac{\vec{N} \cdot \mathbf{F}^{-1}}{\sqrt{\vec{N} \cdot \mathbf{B} \cdot \vec{N}}} = \frac{\vec{N} \cdot \mathbf{F}^{-1}}{\sqrt{\vec{N} \cdot (\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{F}^{-T}) \cdot \vec{N}}}$$

$$\dot{\vec{n}} = \frac{D}{Dt} \left(\frac{\vec{N} \cdot \mathbf{F}^{-1}}{\sqrt{\vec{N} \cdot \mathbf{B} \cdot \vec{N}}} \right) = \frac{\vec{N} \cdot \dot{\mathbf{F}}^{-1}}{\sqrt{\vec{N} \cdot \mathbf{B} \cdot \vec{N}}} - \frac{\vec{N} \cdot \mathbf{F}^{-1}}{2\sqrt{(\vec{N} \cdot \mathbf{B} \cdot \vec{N})^3}} (\vec{N} \cdot \dot{\mathbf{B}} \cdot \vec{N})$$

$$\left. \begin{aligned} (\dot{\mathbf{F}}^{-1}) &= -\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{l} \\ \dot{\mathbf{B}} &= -\mathbf{F}^{-1} \cdot 2\mathbf{d} \cdot \mathbf{F}^{-T} \end{aligned} \right\} \text{viz přednáška 04}$$

$$\dot{\vec{n}} = \frac{D}{Dt} \left(\frac{\vec{N} \cdot \mathbf{F}^{-1}}{\sqrt{\vec{N} \cdot \mathbf{B} \cdot \vec{N}}} \right) = -\frac{\vec{N} \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{l}}{\sqrt{\vec{N} \cdot \mathbf{B} \cdot \vec{N}}} + \frac{\vec{N} \cdot \mathbf{F}^{-1}}{\sqrt{(\vec{N} \cdot \mathbf{B} \cdot \vec{N})^3}} (\vec{N} \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{d} \cdot \mathbf{F}^{-T} \cdot \vec{N})$$

$$= -\vec{n} \cdot \mathbf{l} + \frac{\vec{n}}{\vec{N} \cdot \mathbf{B} \cdot \vec{N}} (\vec{N} \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{d} \cdot \mathbf{F}^{-T} \cdot \vec{N}) = -\vec{n} \cdot \mathbf{l} + \vec{n} \left(\frac{\vec{N} \cdot \mathbf{F}^{-1}}{\sqrt{\vec{N} \cdot \mathbf{B} \cdot \vec{N}}} \cdot \mathbf{d} \cdot \frac{\mathbf{F}^{-T} \cdot \vec{N}}{\sqrt{\vec{N} \cdot \mathbf{B} \cdot \vec{N}}} \right)$$

$$= -\vec{n} \cdot \mathbf{l} + \frac{1}{2} \vec{n} (\vec{n} \cdot (\mathbf{l} + \mathbf{l}^T) \cdot \vec{n}) = -\vec{n} \cdot \mathbf{l} + \vec{n} (\vec{n} \cdot \mathbf{l} \cdot \vec{n})$$

$$\dot{\vec{n}} = -\vec{n} \cdot \mathbf{l} + \vec{n} (\vec{n} \cdot \mathbf{l} \cdot \vec{n})$$

Odvoďte rovnici kontinuity použitím Reynoldsova transportního teorému.

$$\frac{D}{Dt} \int_{v(t)} \phi \, dv = \int_{v(t)} \left(\frac{D\phi}{Dt} + \phi \operatorname{div} \vec{v} \right) dv$$

$$\frac{D}{Dt} \int_{v(t)} \rho \, dv = \int_{v(t)} \left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} \right) dv = 0$$

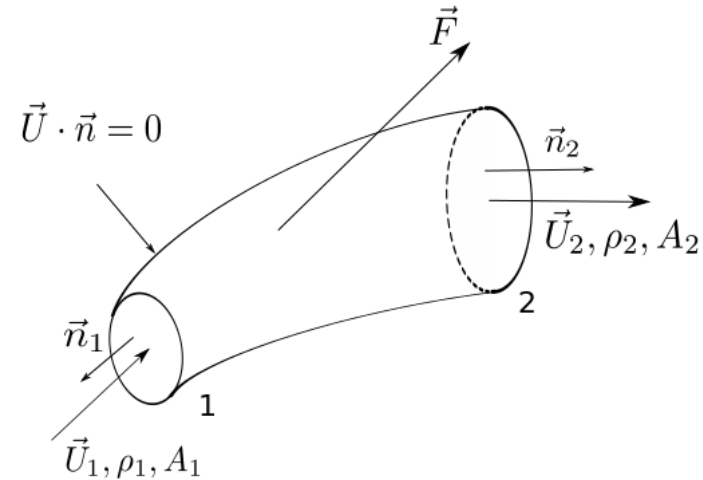
$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0$$

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot \operatorname{grad} \rho + \rho \operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{v} = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{v} = 0$$

Raynoldsův transportní teorém

Spočtete sílu, která působí na proudovou trubici (viz obrázek vpravo). Předpokládejte, že proudění je stacionární a rychlosti a hustoty na vstupu a výstupu jsou homogenní. K výpočtu použijte Raynoldsův transportní teorém.



$$\vec{F} = \frac{D}{Dt} \int_{v(t)} \rho \vec{v}_{st} dv$$

$$\frac{D}{Dt} \int_{v(t)} \vec{q} dv = \int_{v(t)} \left(\frac{D\vec{q}}{Dt} + \vec{q} \operatorname{div} \vec{v} \right) dv = \int_{v(t)} \cancel{\frac{\partial \vec{q}}{\partial t}} dv + \int_{s(t)} \vec{n} \cdot (\vec{v} \otimes \vec{q}) da$$

Raynoldsův
transportní
teorém

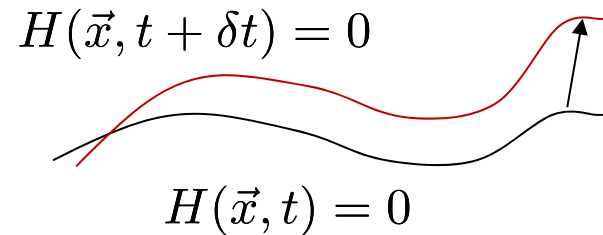
Aplikace na náš problém:

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \frac{D}{Dt} \int_{v(t)} \rho \vec{v}_{st} dv = \int_{s(t)} \rho \vec{n} \cdot (\vec{v}_{st} \otimes \vec{v}_{st}) da = \rho_1 \vec{n}_1 \cdot \vec{v}_{in} \otimes \vec{v}_{in} A_1 + \rho_2 \vec{n}_2 \cdot \vec{v}_{out} \otimes \vec{v}_{out} A_2 = \\ &= -\rho_1 A_1 v_{in} \vec{v}_{in} + \rho_2 A_2 v_{out} \vec{v}_{out} = \dot{m}(\vec{v}_{out} - \vec{v}_{in}) \end{aligned}$$

$$\vec{F} = \dot{m}(\vec{v}_{out} - \vec{v}_{in})$$

Nechť $H(\vec{x}, t) = 0$ je materiálový povrch. Použitím Taylorovy věty odvoďte *podmínku materiálového povrchu* (nebo také *rovnici materiálového povrchu*), která má tvar

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad} H = 0$$



Taylorova věta

$$H(\vec{x}, t + \delta t) = H(\cancel{\vec{x}}, t) + \left(\frac{\partial H}{\partial t} \right)_{\vec{x}, t} \delta t + \left(\frac{\partial H}{\partial x_i} \right)_{\vec{x}, t} \frac{dx_i}{dt} \delta t$$

$$= \left(\frac{\partial H}{\partial t} \right)_{\vec{x}, t} \delta t + \vec{v} \cdot (\text{grad} H)_{\vec{x}, t} \delta t = 0$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad} H = 0$$

Rozhraní dvou kapalin je dáno vztahem $h = h(x_1, x_2, t)$.

Určete časovou změnu výšky hladiny x_3 za předpokladu, že známe pole rychlostí. K odvození použijte rovnici materiálového povrchu.

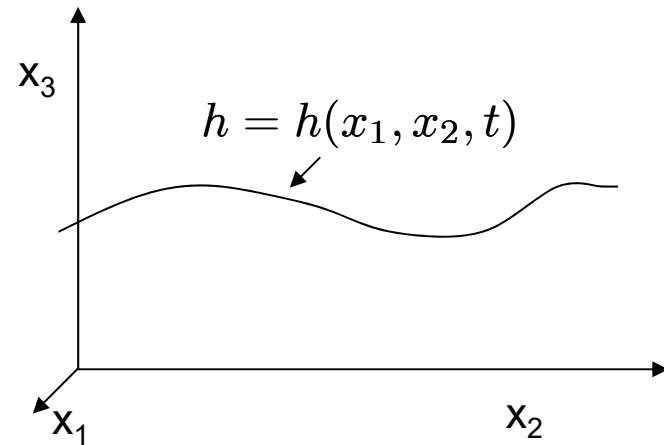
$$\frac{\partial H}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad}H = 0$$

$$H(x_1, x_2, x_3, t) = x_3 - h(x_1, x_2, t) = 0$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial h}{\partial t}, \quad \text{grad}H = \left(-\frac{\partial h}{\partial x_1}, -\frac{\partial h}{\partial x_2}, 1 \right)$$

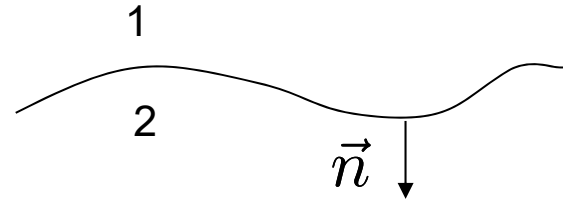
$$\frac{\partial H}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad}H = -\frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial h}{\partial x_1}v_1 - \frac{\partial h}{\partial x_2}v_2 + v_3 = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial h}{\partial t} = v_3 - \frac{\partial h}{\partial x_1}v_1 - \frac{\partial h}{\partial x_2}v_2}$$



Pomocí rovnice materiálového povrchu odvoďte kinematickou hraniční podmínku pro rozhraní dvou nemísitelných kapalin:

$$\vec{n} \cdot \vec{v}^1 = \vec{n} \cdot \vec{v}^2$$



$$\frac{\partial H}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad}H = 0$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \vec{v}_1 \cdot \text{grad}H = \frac{\partial H}{\partial t} + \vec{v}_2 \cdot \text{grad}H = 0$$

$$\vec{v}_1 \cdot \text{grad}H = \vec{v}_2 \cdot \text{grad}H$$

$$\vec{n} = \frac{\text{grad}H}{|\text{grad}H|}$$

$$\vec{n} \cdot \vec{v}^1 = \vec{n} \cdot \vec{v}^2$$