

Slapy na terestrických exoplanetách

30. 3. 2016

Michaela Káňová, Marie Běhounková

Slapové modely

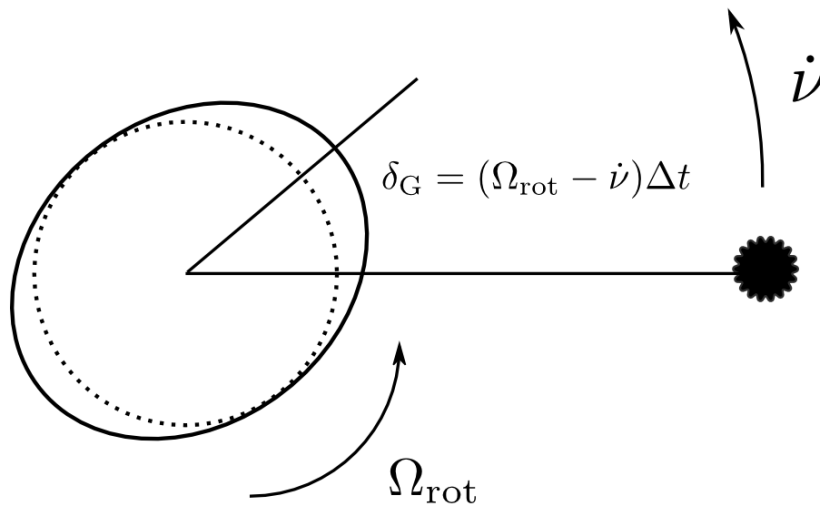
- slapová deformace tradičně popisována statickým **Loveovým číslem k_2** a **slapovým rozestupem** (geometrickým, fázovým nebo časovým)
- oba parametry pro jednoduchost často frekvenčně nezávislé
- konstantní slapový rozestup však vede k **pseudo-synchronní rotaci** planet na výstředné oběžné dráze
- podoba závislosti obou parametrů na frekvenci je dána zvoleným reologickým modelem

elastické těleso: nulový slapový rozestup, konstantní k_2

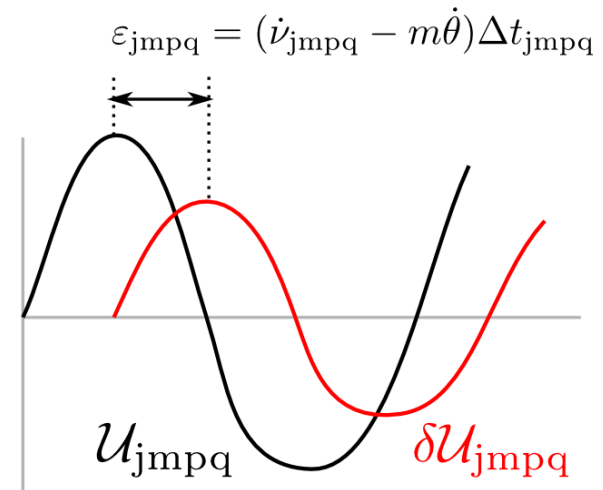
viskózní těleso: konstantní časový rozestup

Různé definice slapového rozestupu

- časový rozestup
- geometrický rozestup



- fázový rozestup



vztah k **faktoru kvality**: $\sin \varepsilon = \frac{1}{Q}$

$$Q = \frac{2\pi E_{\text{peak}}}{\Delta E}$$

Odezva reálných materiálů

- frekvenční závislost **fázového rozestupu** ve vzorku (Efroimsky, 2012):

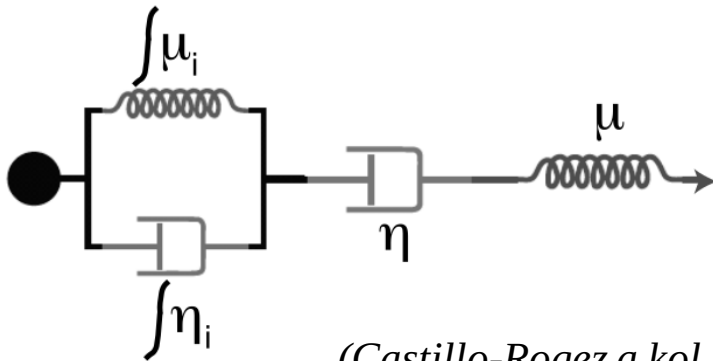
$$\sin \varepsilon = (\mathcal{T} \omega)^{-p}$$

- touto závislostí lze fitovat fázový rozestup v kovech, silikátech i ledech
- konstanta p nabývá v pevných látkách hodnot mezi **0,14 a 0,4** (z geodetických měření pro Zemi nejvýše 0,2)
- závislost (v kovech) poprvé naměřil **Edward N. da Costa Andrade**
→ reologický model, který tento vztah splňuje

Andradeho reologie

- dobře popisuje slapovou odezvu Země v širokém rozsahu frekvencí

$$2\varepsilon = \frac{1}{\mu} \mathbf{D} + \int_0^t \frac{1}{\eta} \mathbf{D}(t') dt' + \int_0^t \mu^{\alpha-1} \left(\frac{t-t'}{\zeta\eta} \right)^{\alpha} \dot{\mathbf{D}}(t') dt'$$



(Castillo-Rogez a kol., 2011)

empirické parametry α a ζ

$$\zeta = \frac{\tau_A}{\tau_M}$$

pro vyšší frekvence platí $\alpha = p$

- v nízkofrekvenční oblasti (nižší než **1/rok**) přechází v **Maxwellovu reologii**

Komplexní Loveovo číslo

- pro reologicky složitější modely je vhodné zavést komplexní Loveovo číslo
- například pro **homogenní nestlačitelnou viskoelastickou kouli** lze díky principu korespondence psát **analytický vztah**

$$\bar{k}_2(\omega) = \frac{3}{2} \frac{1}{1 + \frac{19\bar{\mu}(\omega)}{2\rho g R}}$$

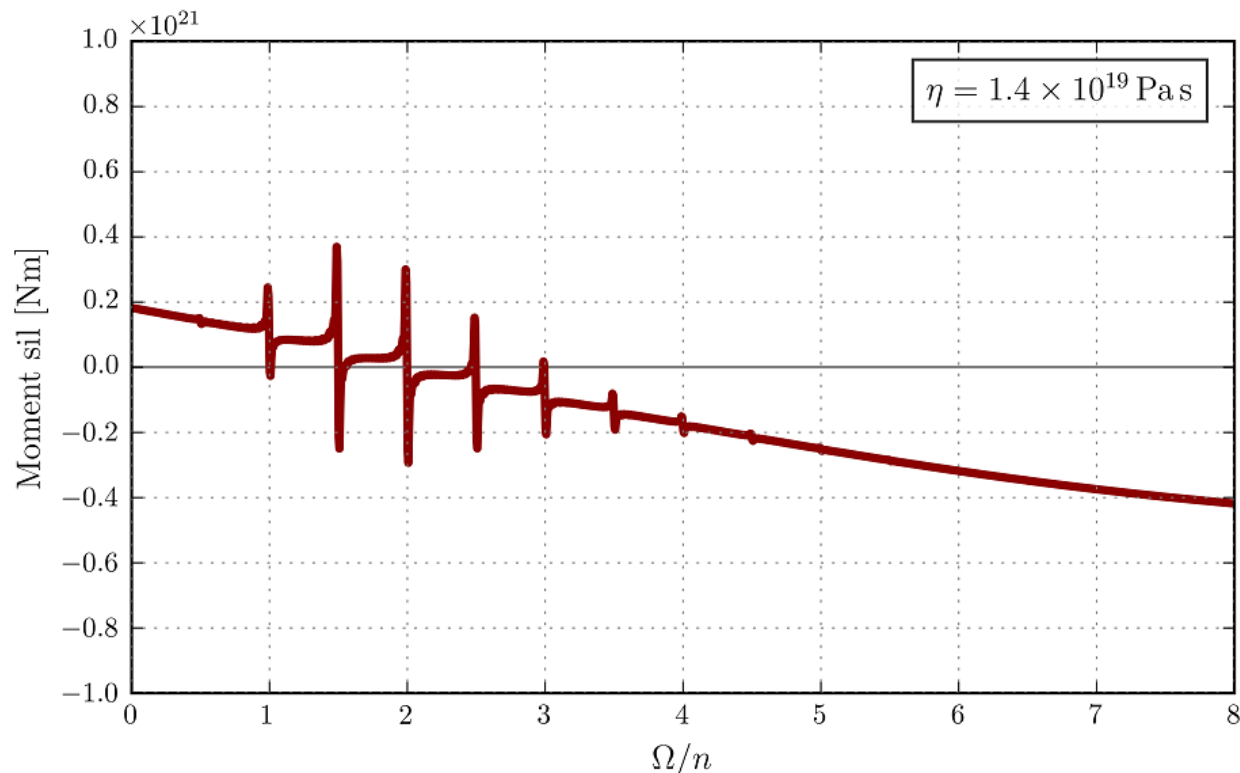
- vztah komplexního Loveova čísla ke dvojici **reálné Loveovo číslo + fázový rozestup** (vystupující v tradičních modelech) je zcela intuitivní:

$$\bar{k}_{jm}(\omega) = k_{jm}(\omega) \exp^{-i\varepsilon_{jm}(\omega)}$$

- pro elipsoidální tělesa je k_{jm} pro různá m obecně různé

Iterativní výpočetní schéma

- proč?
- původní explicitní schéma vedlo k **nepřesnému zahrnutí self-gravitace** blízko elastické limity, tedy i k falešnému momentu sil:



Iterativní výpočetní schéma

- řídící rovnice - zákony zachování

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \\ -\nabla p + \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho_m (\nabla \Phi + \nabla V)\end{aligned}$$

↑ dodatkový potenciál
↓

- konstitutivní vztah pro Andradeho reologii

↑ slapový potenciál

$$2\varepsilon(t) = \int_{t'=-\infty}^{t'=t} \dot{\mathbf{D}}(t') J(t-t') dt'$$

s kompliancí

$$J(t-t') = J \left(1 + \left(\frac{t-t'}{\zeta \tau_M} \right)^\alpha + \left(\frac{t-t'}{\tau_M} \right) \right)$$

- hraniční podmínky

$$(-\pi \mathbf{I} + \mathbf{D}) \cdot \mathbf{e}_r - u_s^r \rho_m \mathbf{g}_s = 0$$

$$(-\pi \mathbf{I} + \mathbf{D}) \cdot \mathbf{e}_r + u_b^r (\rho_c - \rho_m) \mathbf{g}_b = -\rho_c (\Phi + V) \mathbf{e}_r$$

Iterativní výpočetní schéma

- diskretizace v původním explicitním schématu:

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \mathbf{u}_{i+1} &= 0 \\
 -\nabla p_{i+1} + \nabla \cdot \mathbf{D}_{i+1} &= \rho_m (\nabla \Phi_{i+1} + \nabla V_i) \\
 2\varepsilon_{i+1} - \frac{\mathbf{D}_{i+1}}{\mu} &= \overbrace{\frac{1}{2} \frac{\mathbf{D}_0}{\eta} \Delta t + \sum_{j=1}^{M_i} \frac{\mathbf{D}_j}{\eta} \Delta t}^{M_i} + \\
 &\quad \underbrace{+ \frac{1}{2} w_{(i+1)j} \left(\frac{\mathbf{D}_1}{(\zeta \eta)^\alpha} - \frac{\mathbf{D}_0}{(\zeta \eta)^\alpha} \right) + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{2} w_{(i+1)j} \left(\frac{\mathbf{D}_{j+1}}{(\zeta \eta)^\alpha} - \frac{\mathbf{D}_{j-1}}{(\zeta \eta)^\alpha} \right)}_{A_i}
 \end{aligned}$$

časový krok je konstantní a pro váhu platí: $w_{(i+1)j} = (i+1-j)^\alpha \Delta t^\alpha \mu^{\alpha-1}$

$$\begin{aligned}
 (-\pi_{i+1} \mathbf{I} + \mathbf{D}_{i+1}) \cdot \mathbf{e}_r - (u_s^r)_{i+1} \rho_m \mathbf{g}_s &= 0 \\
 (-\pi_{i+1} \mathbf{I} + \mathbf{D}_{i+1}) \cdot \mathbf{e}_r + (u_b^r)_{i+1} (\rho_c - \rho_m) \mathbf{g}_b &= -\rho_c (\Phi_{i+1} + V_i) \mathbf{e}_r
 \end{aligned}$$

Iterativní výpočetní schéma

- pro nultou iteraci ($l=0$) rovnice řešeny explicitně, dále dle následujícího schématu:

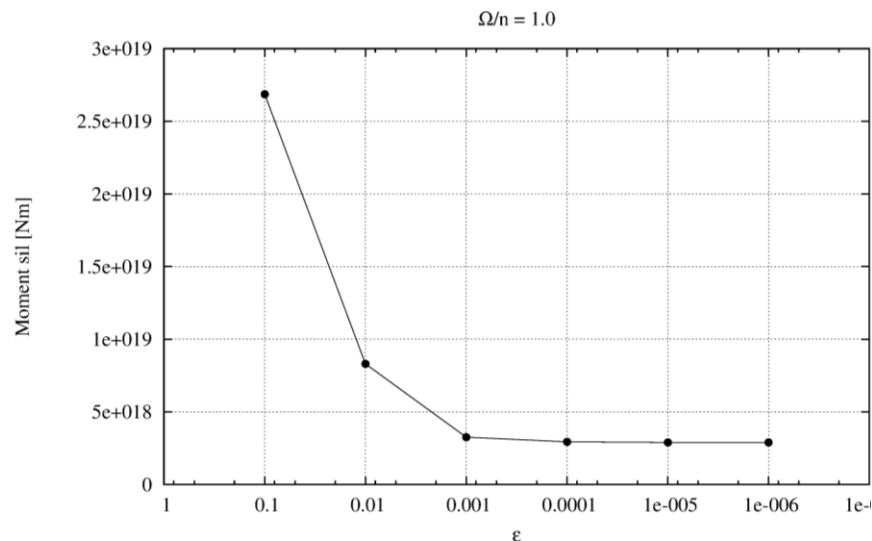
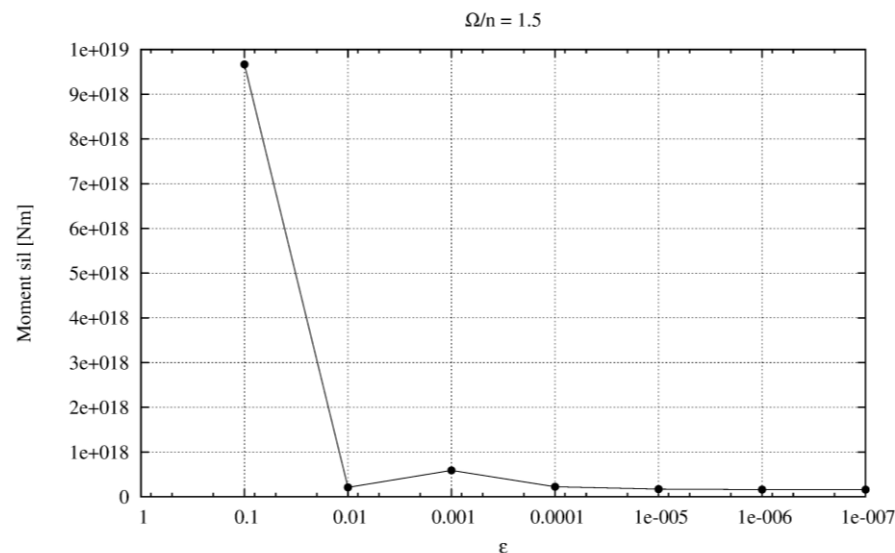
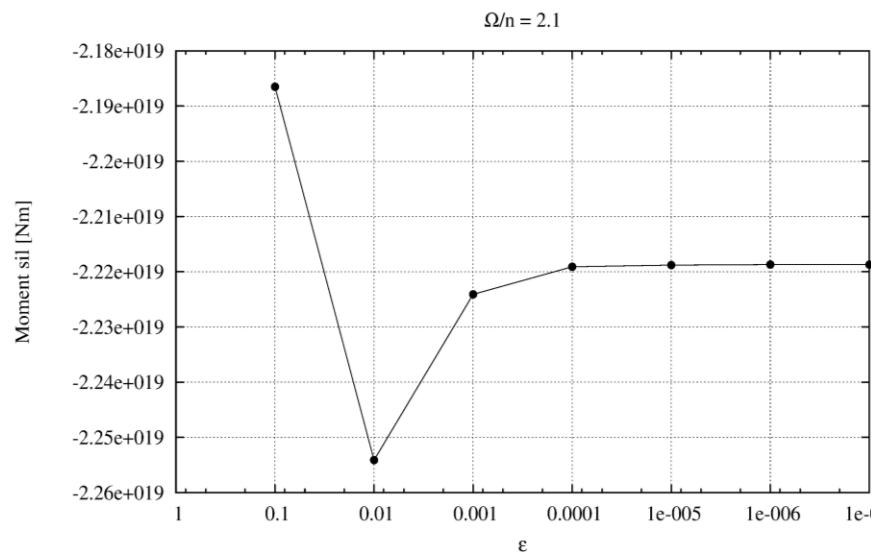
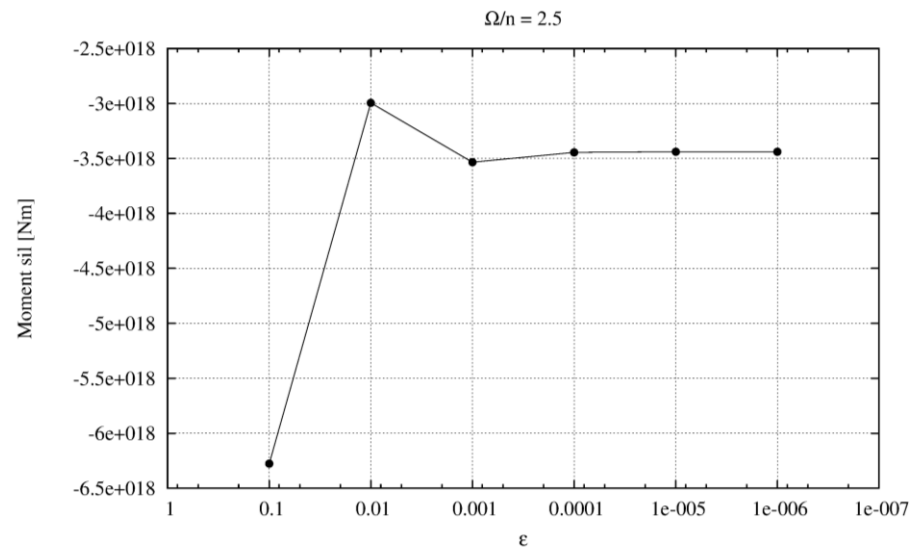
$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{u}_{i+1} &= 0 \\ -\nabla p_{i+1} + \nabla \cdot \mathbf{D}_{i+1} &= \rho_m (\nabla \Phi_{i+1} + \nabla V_{i+1}^{l-1}) \\ 2\varepsilon_{i+1} - \frac{\mathbf{D}_{i+1}}{\mu} &= M_i + \frac{1}{2} \frac{\mathbf{D}_{i+1}^{l-1}}{\eta} \Delta t + \\ &\quad + A_i + \frac{1}{4} w_{(i+1)i} \left(\frac{\mathbf{D}_{i+1}^{l-1}}{(\zeta\eta)^\alpha} - \frac{\mathbf{D}_{i-1}}{(\zeta\eta)^\alpha} \right)\end{aligned}$$

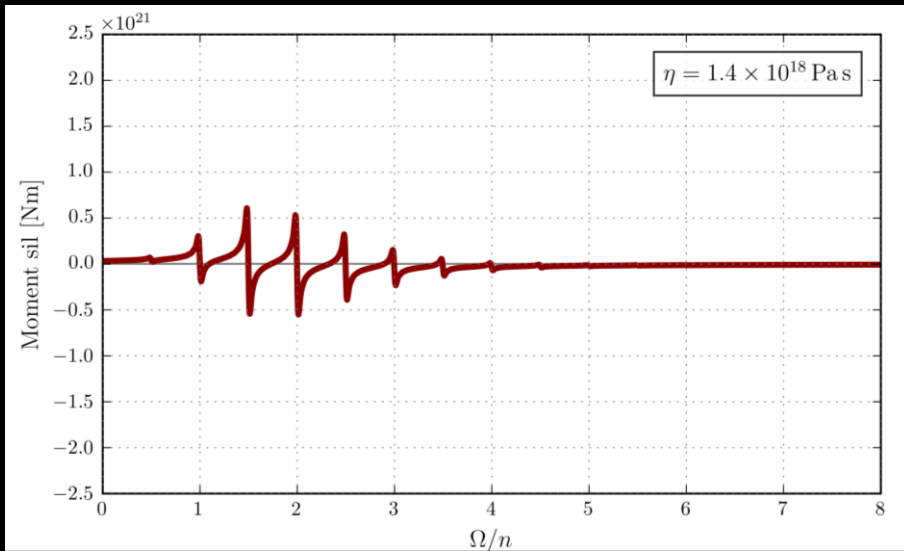
$$\begin{aligned}(-\pi_{i+1} \mathbf{I} + \mathbf{D}_{i+1}) \cdot \mathbf{e}_r - (u_s^r)_{i+1} \rho_m \mathbf{g}_s &= 0 \\ (-\pi_{i+1} \mathbf{I} + \mathbf{D}_{i+1}) \cdot \mathbf{e}_r + (u_b^r)_{i+1} (\rho_c - \rho_m) \mathbf{g}_b &= -\rho_c (\Phi_{i+1} + V_{i+1}^{l-1}) \mathbf{e}_r\end{aligned}$$

- s ukončovací podmínkou

$$\frac{|\mathbf{D}_{II}^l - \mathbf{D}_{II}^{l-1}|}{\mathbf{D}_{II}^l} < \varepsilon.$$

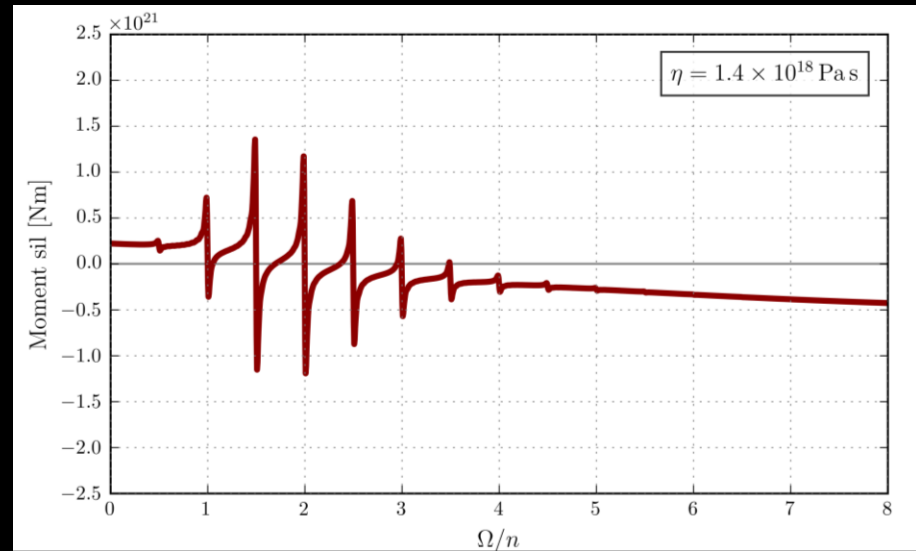
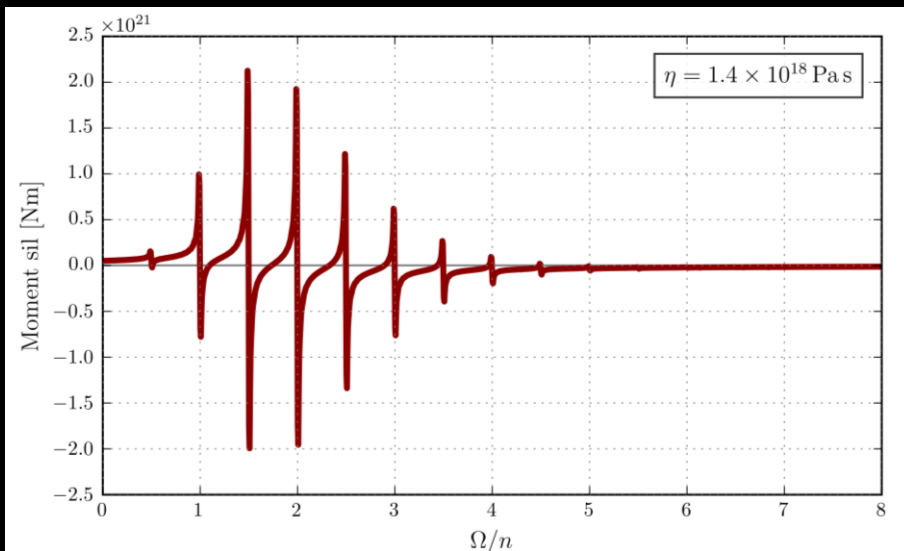
Konvergence iterativního řešení





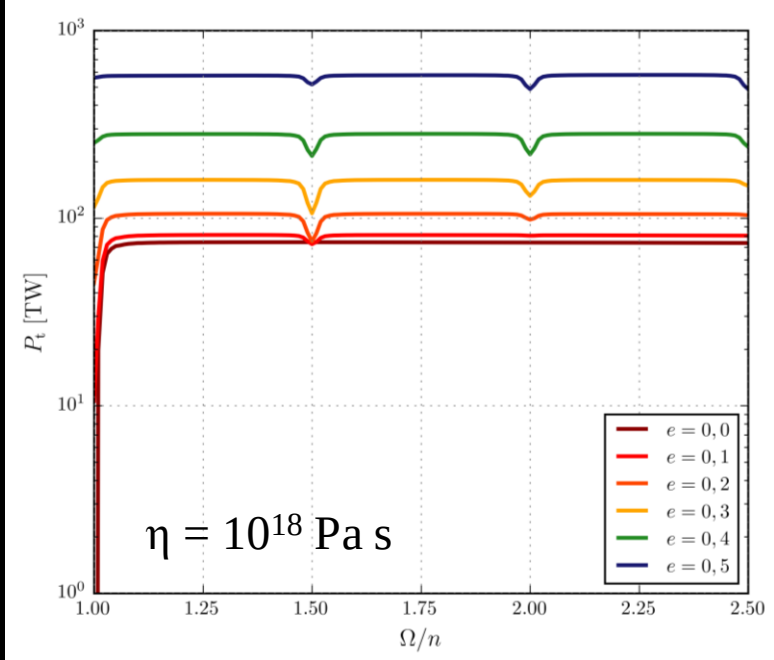
Explicitní schéma,
zahrnutí self-gravitace

*vyšší amplitudy, ale falešný
moment sil*

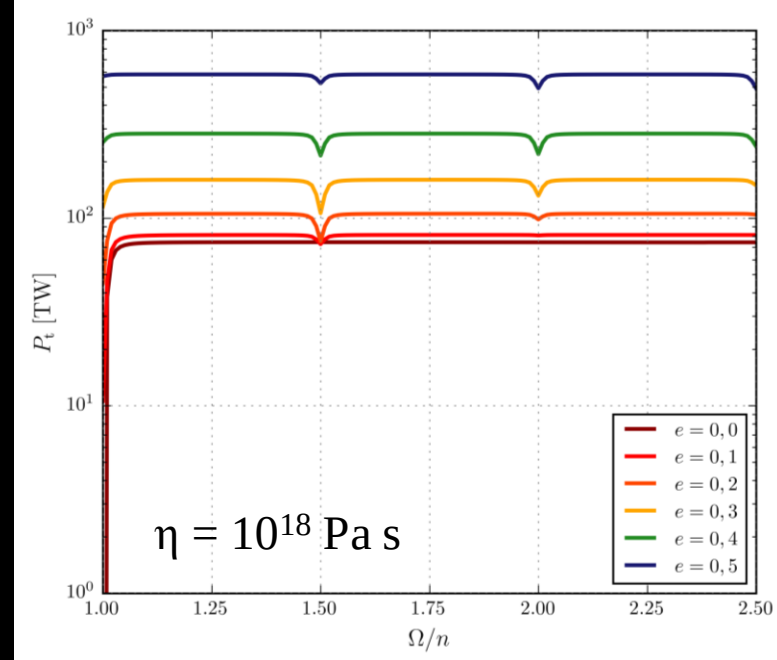


Iterativní schéma

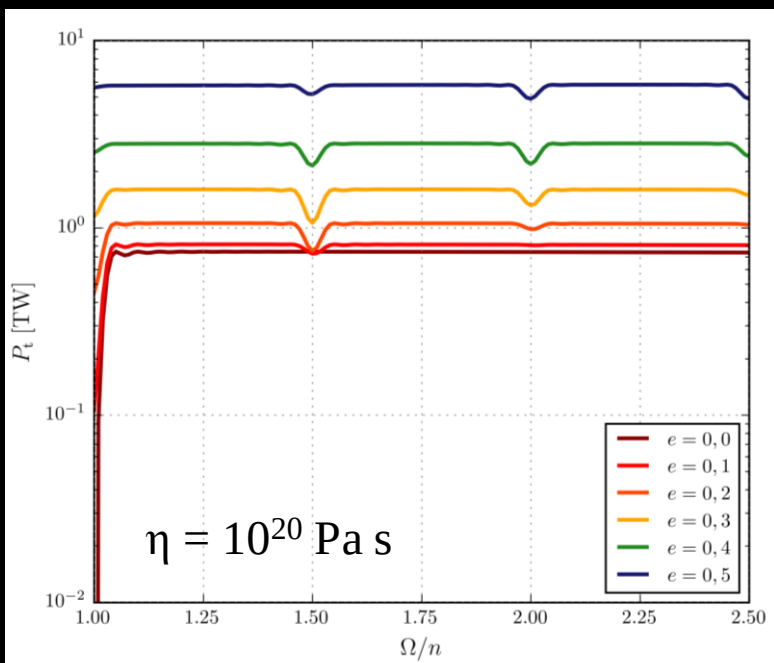
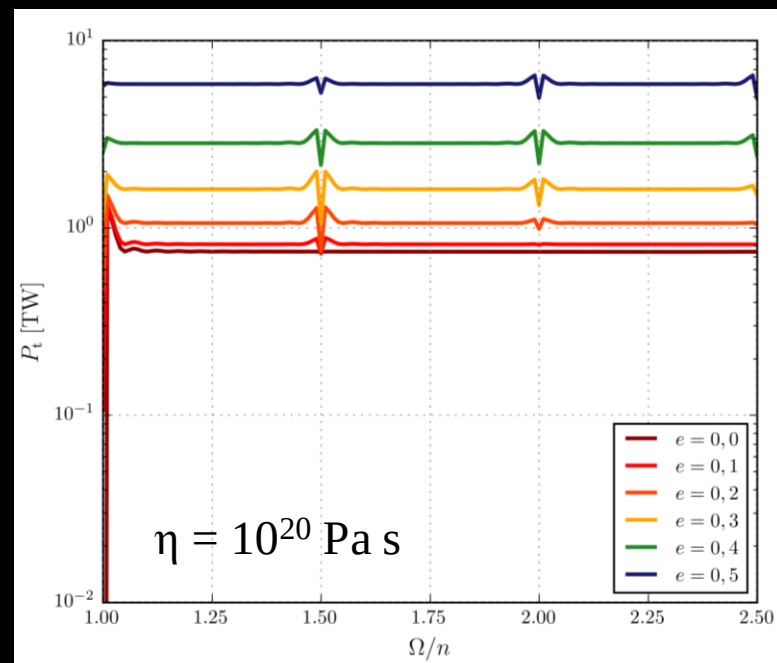
*ještě vyšší amplitudy, ve
vysokých frekvencích
správné přimknutí k nule*



Explicitní schéma



Iterativní schéma



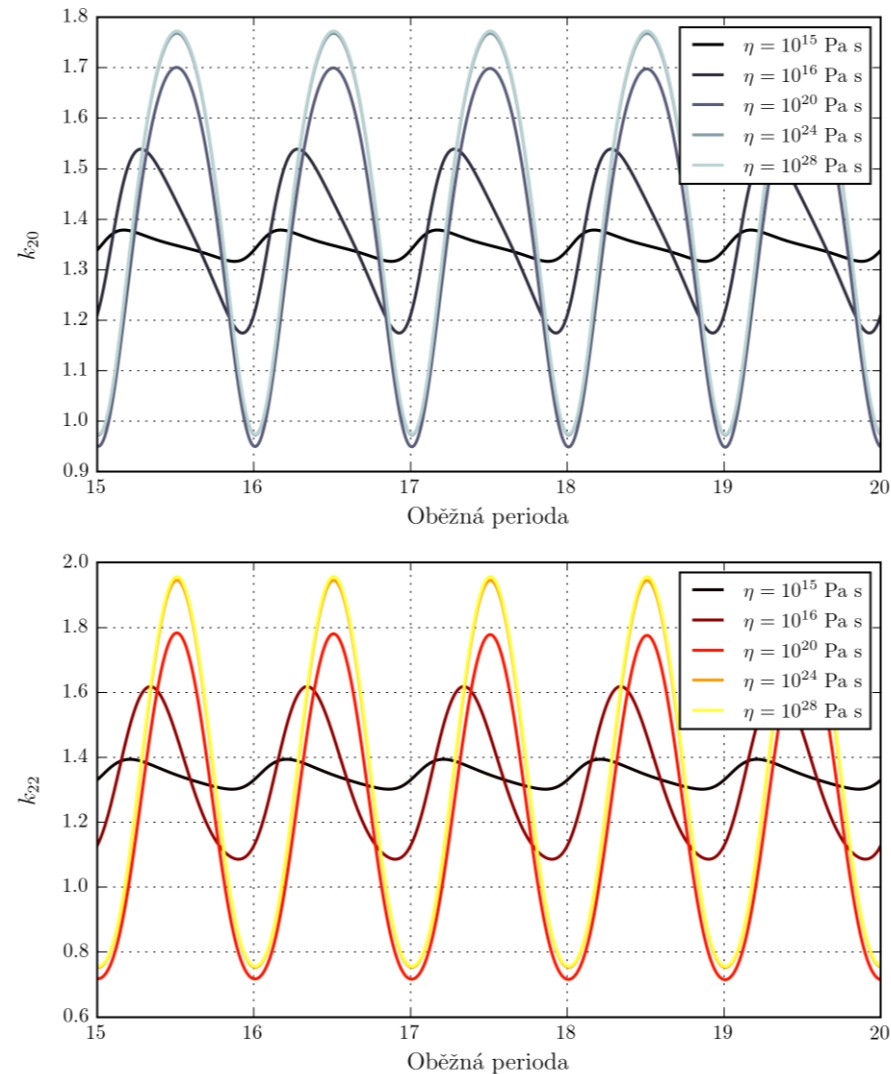
Loveova čísla

- na následujících obrázcích je vykreslen časový vývoj **absolutní hodnoty** Loveových čísel k_{20} a k_{22} a časový vývoj **fázového rozestupu** ε_{22}
- dva případy: **a)** vázaná rotace na dráze s výstředností $e = 0,2$
b) obecná rotace ($\Omega/n = 2,1$) na kruhové dráze
- Loveova čísla (při zadané μ) závisí na kombinaci frekvence a viskozity, v elastickém a viskózním režimu se mohou navzájem velmi odlišovat
- pro Zemi je elastické Loveovo číslo $k_2 = 0,3$ a viskózní (sekulární) $k_s = 0,9$
- v Maxwellově reologii lze pro frekvenční závislost k_2 psát (Correia a kol., 2014):

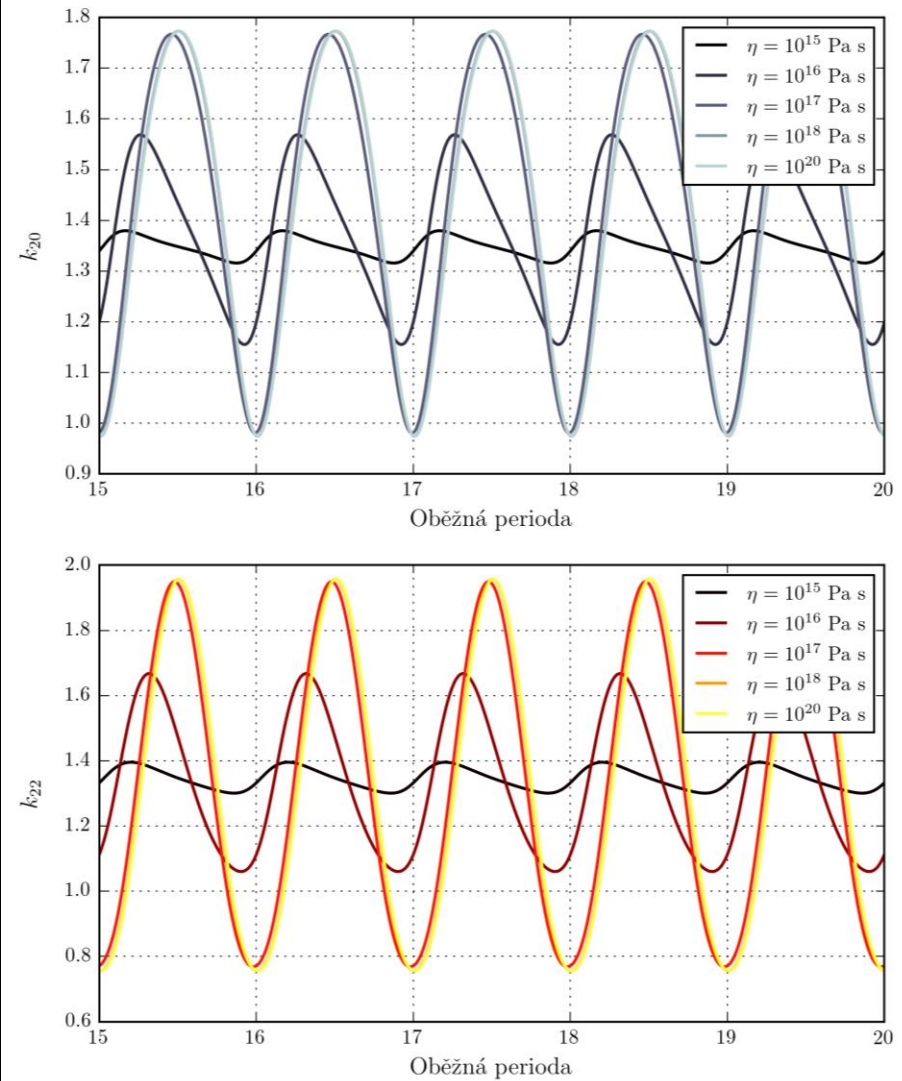
$$k_2(\omega) = k_s \sqrt{\frac{1 + (\tau_M \omega)^2}{1 + (\tau \omega)^2}}$$

Vázaná rotace, $e = 0,2$

Andradeho reologie

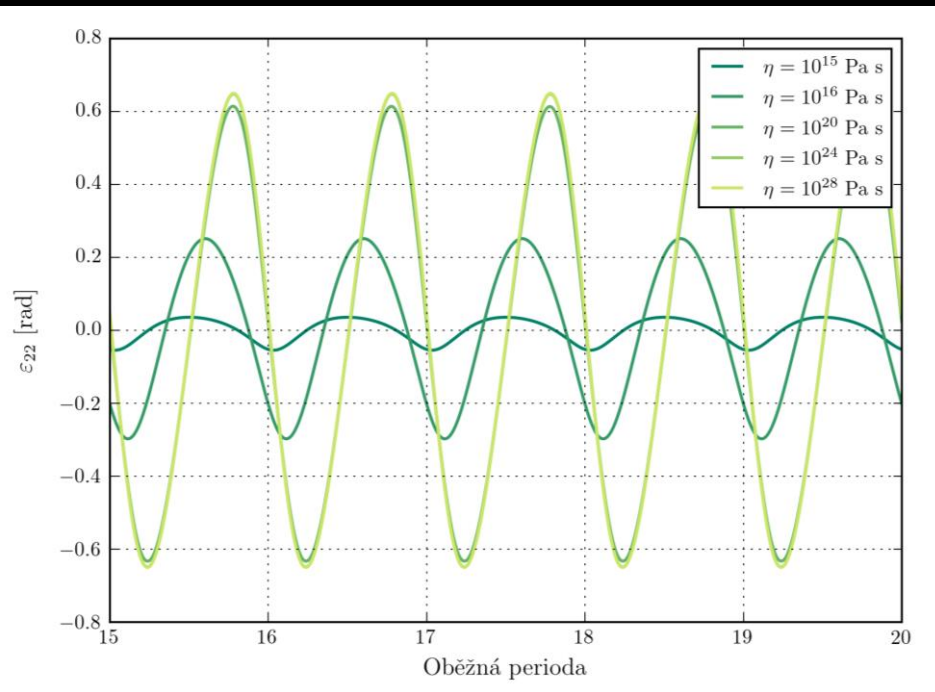


Maxwellova reologie

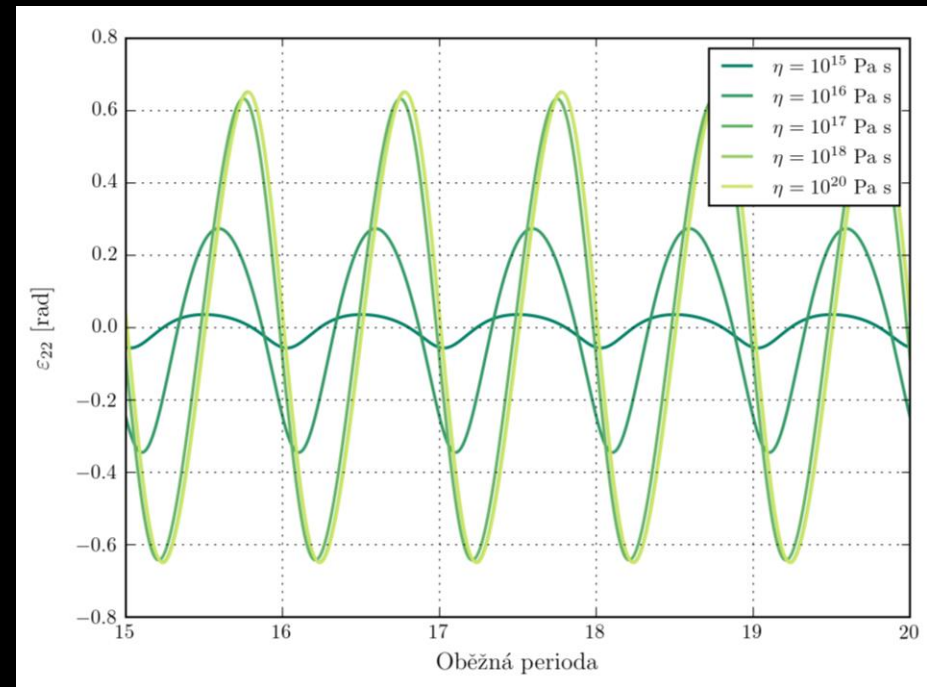


Vázaná rotace, $e = 0,2$

Andradeho reologie



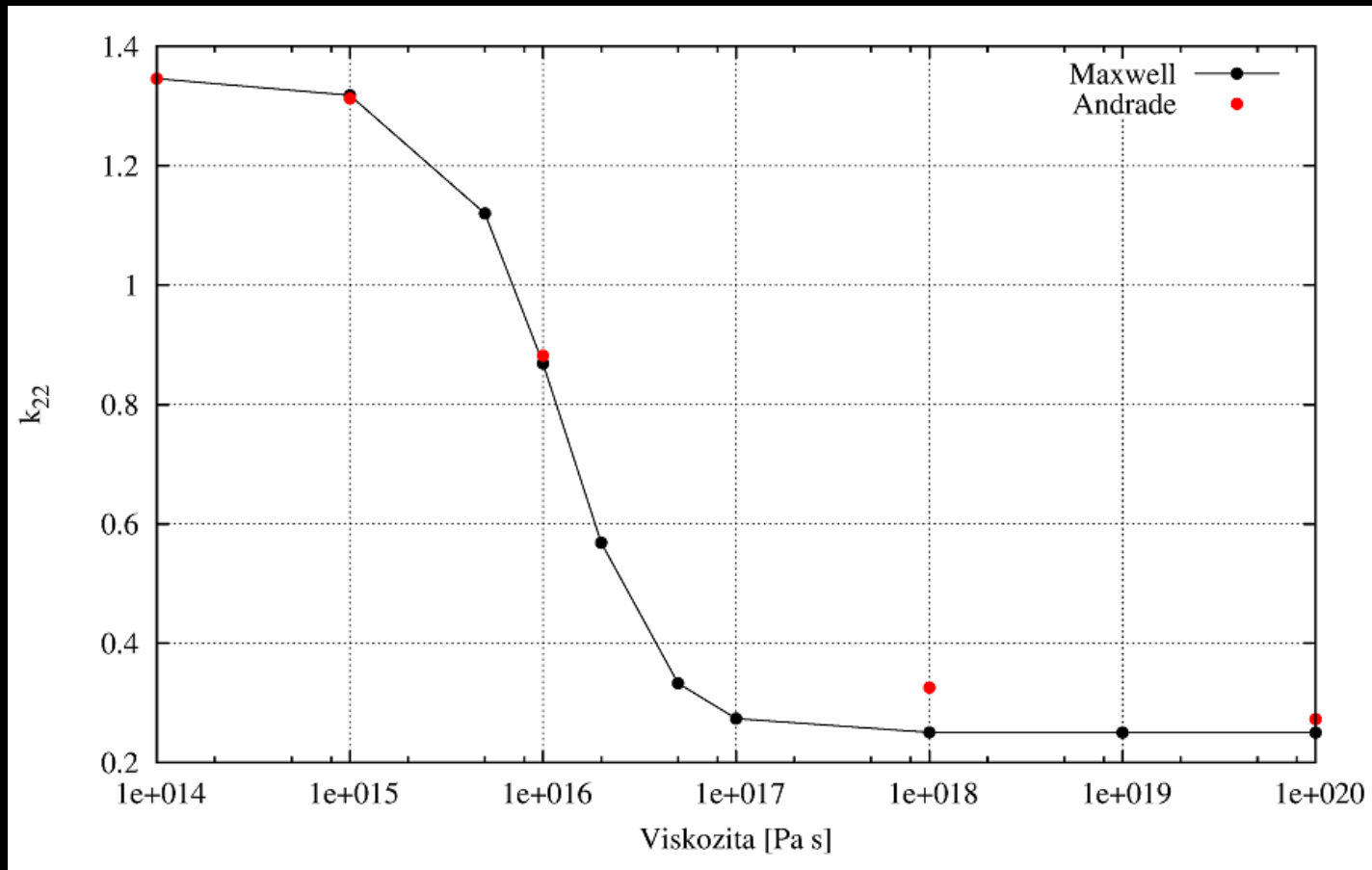
Maxwellova reologie



Očekávání: ve viskózní ($\eta = 10^{15}$ Pa s) i elastické ($\eta = 10^{28}$ Pa s) limitě by měla být deformace ve fázi se slapovým zatěžováním

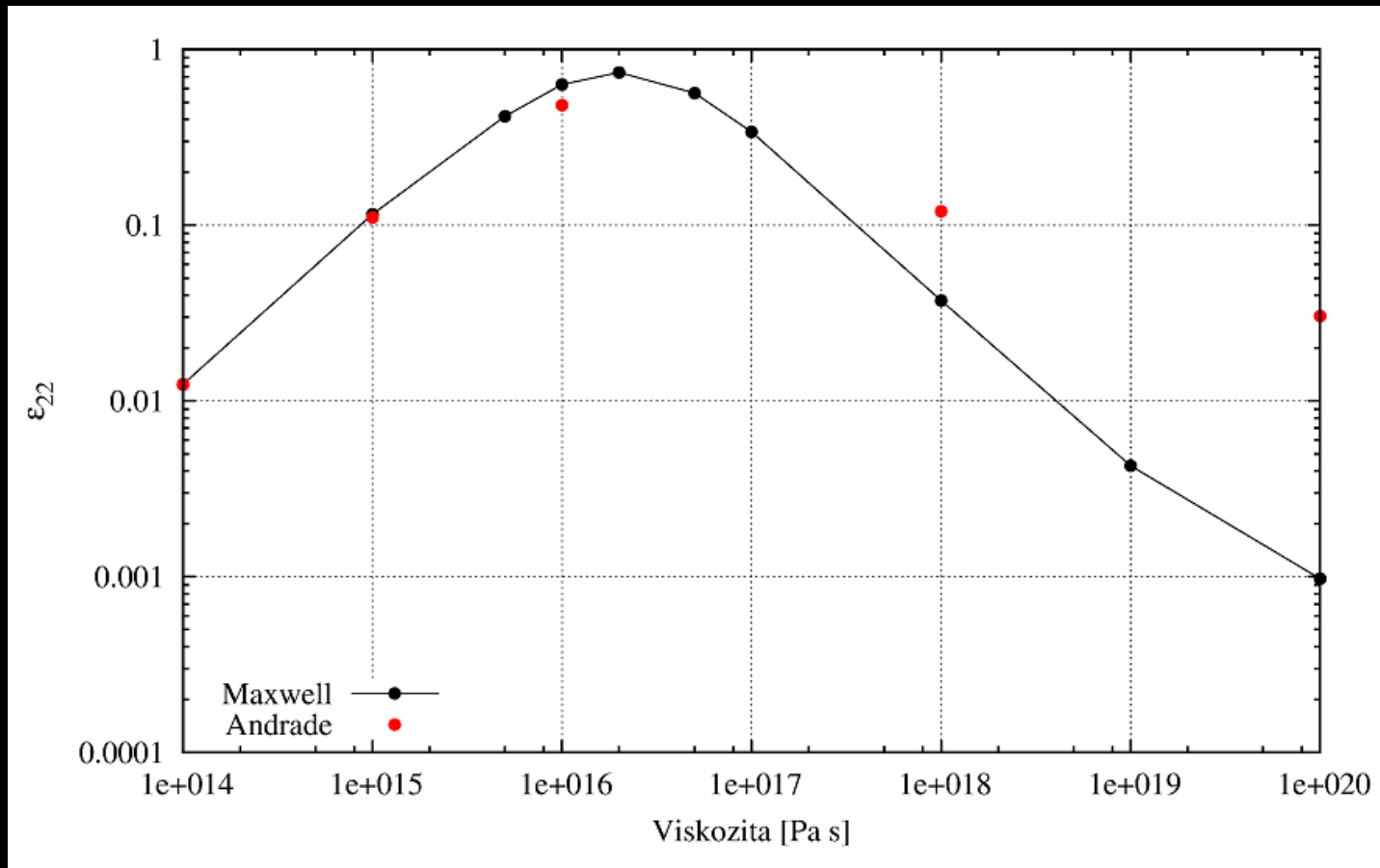
Výpočty však začínáme z viskózní limity odpovídající konstantní části slapového potenciálu, při vysokých viskozitách tedy pracujeme s **permanentně def. tělesem**

Obecná rotace, $\Omega/n = 2,1$; kruhová dráha



Absolutní hodnota Loveova čísla k_{22} - přechod od viskózní k elastické limitě

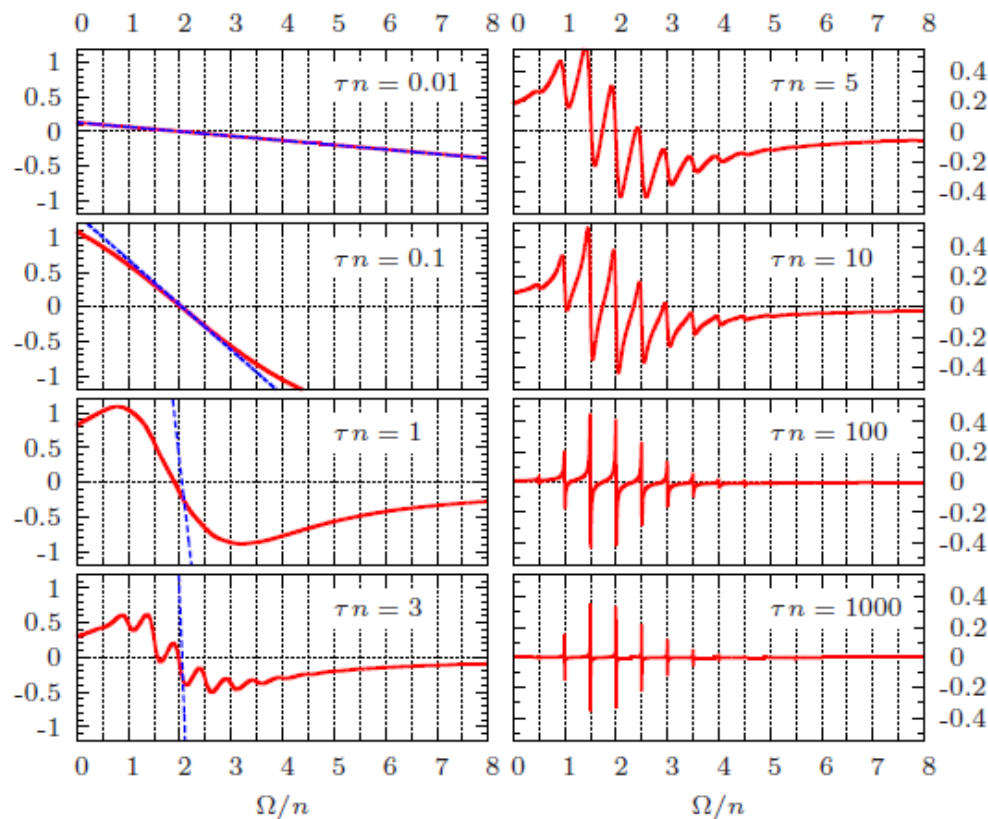
Obecná rotace, $\Omega/n = 2,1$; kruhová dráha



Závislost fázového rozestupu ε_{22} na viskozitě

Moment slapových sil

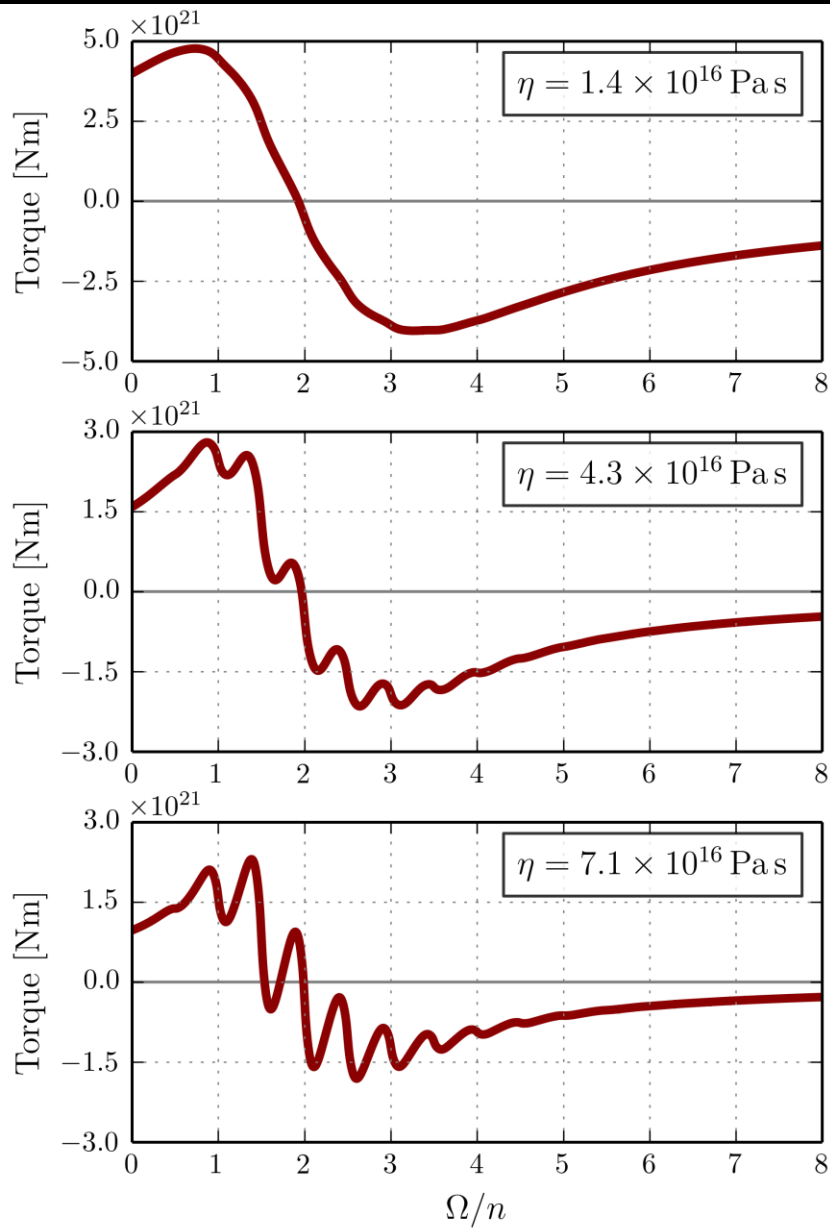
- pro možnost porovnání s analytickým modelem Correia a kol. počítáme **průměrný moment slapových sil** pro poměrně výstřednou dráhu ($e = 0,4$)
- závislost momentu sil na **spin-orbitálním poměru** a **viskozitě**



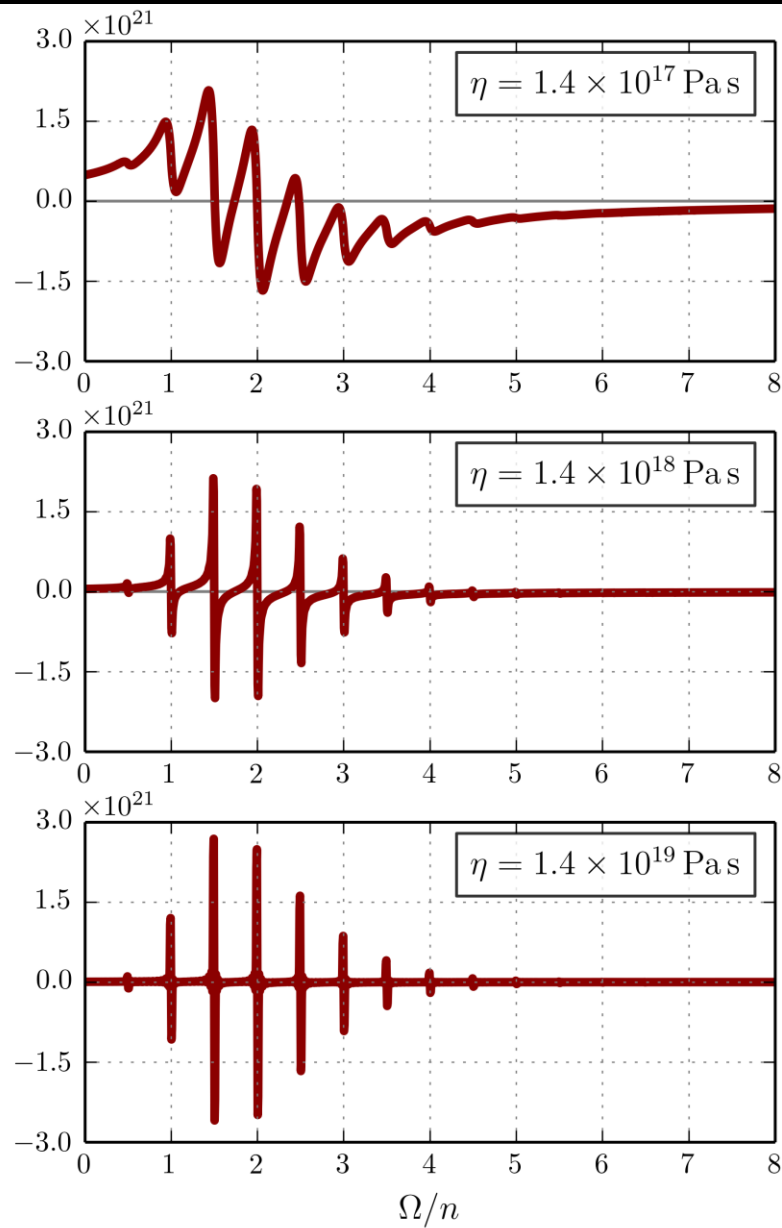
modrá čára = model s
konstantním časovým
rozestupem

červená čára = Maxwellova
reologie, analytický model

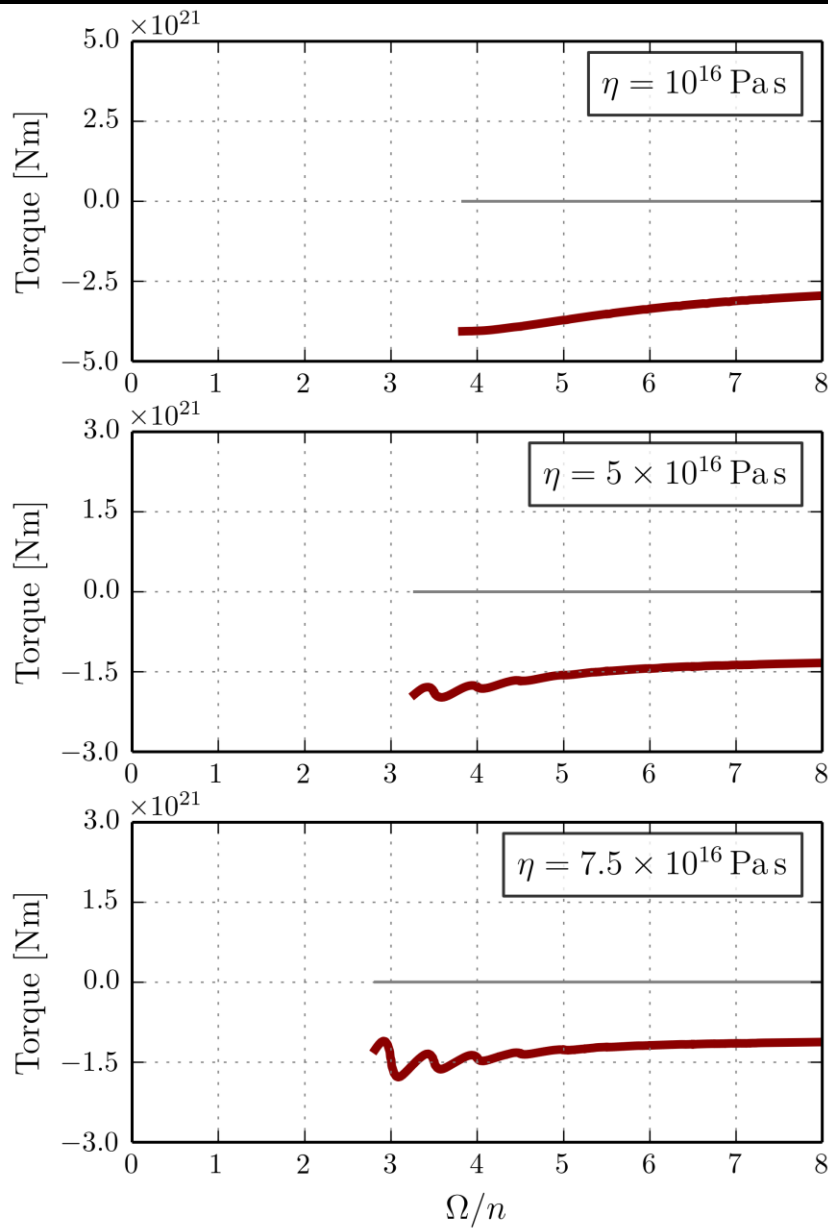
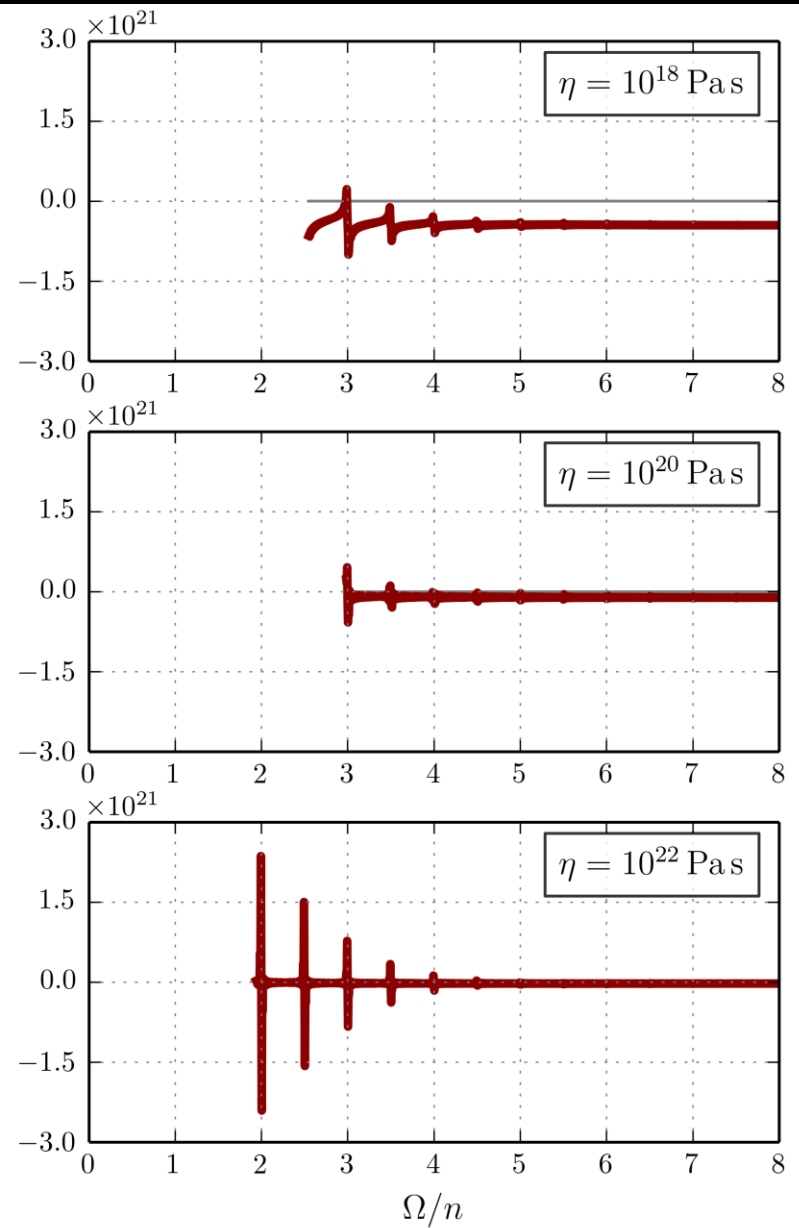
Correia a kol. (2014)



Maxwellova reologie



e = 0,4



Andradeho reologie

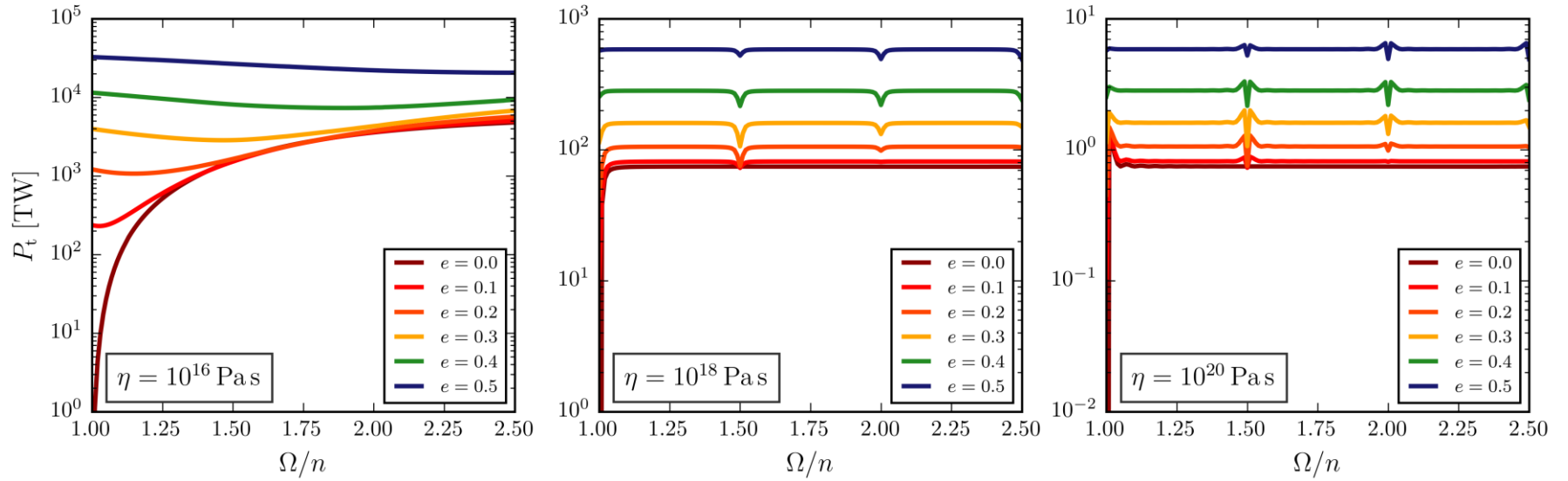
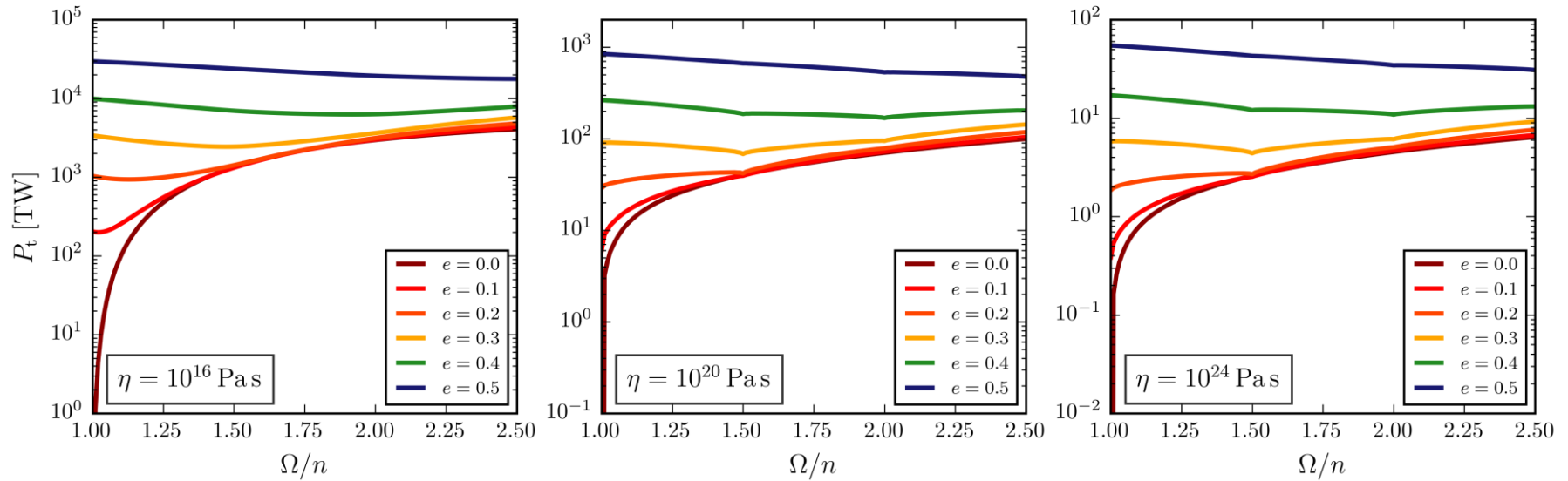
$e = 0,4$

v běhu na geofy1,2,3

Slapové zahřívání

- průměr přes 10 až 100 oběhů (podle viskozity a reologického modelu)
- zahrnuta self-gravitace, tlak v kapalném vnějším jádře i odstředivá síla
- Maxwellova reologie již s implicitním schématem
- lokální minima asociována se **spin-orbitálními resonancemi**

Maxwellova reologie



Andradeho reologie

Závěr

- **iterativní výpočetní schéma** je pro správné zahrnutí self-gravitace zvláště při vysokých uvažovaných viskozitách nezbytné
- **minima slapového zahřívání** jsou v obou modelech při vyšších viskozitách spjatá se spin-orbitálními resonancemi, v Andradeho modelu jsou však velmi mělká
- ve viskoelastických modelech lze nalézt několik rovnovážných rotačních stavů